

有限台付き可換モノイド値関手 F_A に関する文献ノート

ChatGPT

2026 年 3 月時点のメモ

概要

可換モノイド A に対して

$$F_A(X) = \{f : X \rightarrow A \mid \text{supp}(f) \text{ が有限} \}, \quad \text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 1_A\}$$

で定まる finitary endofunctor を考える。本ノートの目的は、この関手を

- (i) $[\text{FinSet}, \text{Set}]$ の対象として見る viewpoint,
- (ii) n -skeletal / n -coskeletal の viewpoint,
- (iii) 自然変換 $F_A \Rightarrow F_B$ の明示的記述

の三つの観点から文献に位置づけることである。調べた範囲では、最も直接に関係する最近の文献は Kori–Watanabe [1] であり、そこではまさに可換モノイドから生じる branching functor を定義し、source monoid が singly generated な場合の $\text{Nat}(F_A, F_B)$ の明示的記述を与えている。一方、multiset / finite powerset 的な特別場合については Dahlqvist–Neves [3] が先行している。本ノートは網羅的 bibliography ではなく、今回の問題に最も近い文献を優先して整理したものである。

1 基本設定と $[\text{FinSet}, \text{Set}]$ の対象としての見方

可換モノイド A に対し

$$F_A(X) = \{f : X \rightarrow A \mid \text{supp}(f) \text{ が有限} \}$$

を定める。有限集合 S については有限台条件は自動的になので

$$F_A(S) = A^S.$$

写像 $u : S \rightarrow T$ に対する作用は

$$(F_A(u)(f))(t) = \prod_{u(s)=t} f(s)$$

で与えられる。可換性のおかげで右辺は well-defined である。

この関手は finitary であり、包含

$$i : \text{FinSet} \hookrightarrow \text{Set}$$

に沿う左 Kan 拡張として

$$F_A \cong \text{Lan}_i(F_A|_{\text{FinSet}})$$

で復元される。したがって、 F_A の本質的なデータは

$$\text{FinSet} \rightarrow \text{Set}, \quad S \mapsto A^S$$

という $[\text{FinSet}, \text{Set}]$ の対象だと思ってよい。ここで $[\text{FinSet}, \text{Set}]$ は theory of objects の classifying topos として現れる [8, 9, 16]。この意味で、 F_A は「object classifier の対象」と考えてよい。

この viewpoint では、任意の集合 X に対し

$$F_A(X) \cong \varinjlim_{S \subseteq_{\text{fin}} X} A^S$$

であり、これは $[\text{FinSet}, \text{Set}]$ の対象 F_A に対応する finitary endofunctor $X \mapsto X \otimes F_A$ と同一視できる [8, 9, 16]。

2 今回比較したい主張

以下は今回文献に位置づけたい主張の要約である。

Proposition 1 (比較対象となる主張). 可換モノイド A, B をとる。

- (1) $A \neq 1$ ならば、 F_A はどの有限 n に対しても n -skeletal ではない。
- (2) $A \neq 1$ ならば、 F_A は 3-coskeletal だが 2-coskeletal ではない。
- (3) 自然変換 $\eta: F_A \Rightarrow F_B$ は、ちょうど写像

$$p: A \times A \rightarrow B$$

であって

$$p(1_A, c) = 1_B, \quad p(ab, c) = p(a, bc)p(b, ac)$$

をみたすものと 1 対 1 に対応する。対応は

$$(\eta_X(f))(x) = p\left(f(x), \prod_{y \neq x} f(y)\right)$$

で与えられる。

Remark 1. (2) と (3) はよく噛み合っている。実際、 $j_3: \text{FinSet}_{\leq 3} \hookrightarrow \text{FinSet}$ とおくと、3-coskeletal な対象全体は

$$\text{cosk}_3 = \text{Ran}_{j_3} j_3^*$$

で与えられる *reflective subcategory* をなす。したがって *target* が *3-coskeletal* であれば、自然変換は $0, 1, 2, 3$ 点集合上でのデータで完全に決まる。ここで 2 点集合上の第 1 成分

$$p(a, b) = (\eta_{[2]}(a, b))(0)$$

が基本データであり、 3 点集合上の整合性がちょうど

$$p(ab, c) = p(a, bc)p(b, ac)$$

を強制する、というのが *conceptual* な説明である。

Remark 2. 少なくとも今回確認した文献では、上の (3) が任意の可換モノイド A, B に対してこのままの形で *stated/proved* されているものは見つからなかった。最も近いのは [1] であり、ここでは *source monoid* が *singly generated* な場合に $\text{Nat}(F_A, F_B)$ をかなり具体的に記述している。

3 最も近い文献

3.1 Kori–Watanabe

今回の話題に最も近い recent reference は Kori–Watanabe [1] である。この論文で重要なのは次の点である。

- (a) 彼らは可換モノイド A から生じる関手 F_A を明示的に定義している。
- (b) 例として、 $A = \mathbb{N}$ による multiset functor や、 $A = \{0, 1\}$ with $\vee$ による covariant finite powerset functor を含めている。
- (c) 自然変換 $\text{Nat}(F_A, F_B)$ の特徴付けを主題の一つとして扱っている。
- (d) とくに Theorem 4.1 では、source monoid A が *singly generated* な場合に $\text{Nat}(F_A, F_B)$ を explicit に記述している。
- (e) 結論部では、この特徴付けを finitely generated な場合へ拡張することが今後の方向として挙げられている。

したがって、今回の

$$\text{Nat}(F_A, F_B) \cong \{p : A \times A \rightarrow B \mid p(1_A, c) = 1_B, p(ab, c) = p(a, bc)p(b, ac)\}$$

という一般形が正しければ、これは [1] による *singly generated case* を一般の可換モノイドへ押し広げたものとして読める。

なお、この論文の周辺フレームワークそのものは Watanabe–Junges–Rot–Hasuo [2] による coalgebraic product construction の一般論に支えられている。

3.2 Dahlqvist–Neves

Dahlqvist–Neves [3] は、いくつかの monad T に対して

$$1 \rightarrow T, \quad T \times T \rightarrow T$$

という natural transformations を分類する。この中には multiset monad も含まれており, Kori–Watanabe でも finite powerset / multiset の既知の characterisation は Dahlqvist–Neves に遡ると明記されている [1]。

ただし, [3] の主眼は monad 的な binary operations の分類であり, 任意の可換モノイド A, B に対する

$$\text{Nat}(F_A, F_B)$$

の完全分類をそのまま与えるものではない。したがって, 今回の問題設定に対しては [3] は「直接の先行文献」というより「特別場合の重要な先駆」である。

4 背景文献：coalgebra と set functor

4.1 Monoid-valued functor の文脈

Gumm–Schröder [4] は monoid-labeled transition systems を扱い, 可換モノイド（より一般には適当な algebraic data）から生じる有限台付き値関手が coalgebra 的に自然であることを示している。今回の F_A を, weighted / monoid-valued branching の基本例として位置づけるなら, まず引用すべき文献である。

4.2 Accessible / finitary set functor の文脈

Adámek–Gumm–Trnková [5] は accessible set functors の presentation を与える古典的文献である。 F_A は finitary functor なので, この系統の文献は「なぜ FinSet への制限だけで十分か」を説明する背景として有用である。さらに古典的背景として Adámek–Trnková [6] も便利である。

5 背景文献：classifying topos, Lawvere theory, finitary functor

$[\text{FinSet}, \text{Set}]$ を classifying topos of the theory of objects とみる viewpoint は Mac Lane–Moerdijk [8] に遡り, Borceux [9] にも finite limit theory と Kan extension の観点から説明がある。また, finitary monad / Lawvere theory の一般論としては Kelly–Power [10], Lack–Rosický [11], Adámek–Rosický [7] が基礎文献である。

今回の文脈では, この一般論は次の二つの使い方を持つ。

- (1) F_A が finitary なので, FinSet 上の値 A^S と射の作用だけで復元できること。

(2) $[\mathbf{FinSet}, \mathbf{Set}]$ の対象としての F_A に対し、集合 X への evaluation が coend / tensor

$$X \otimes F_A$$

で書けること。

この viewpoint に立つと、skeleta / coskeleta も

$$j_n : \mathbf{FinSet}_{\leq n} \hookrightarrow \mathbf{FinSet}$$

に関する Kan extension として理解されるので、今回の 3-coskeletality の議論は非常に自然に見える。

6 背景文献：levels, skeleta, coskeleta, Aufhebung

skeleta / coskeleta / levels の一般論は Lawvere の問題意識に由来し、近年は Menni の一連の仕事 [14, 15] によってかなり整理されている。古典的かつ計算例として重要なのは Kennett–Riehl–Roy–Zaks [13] であり、simplicial sets や cubical sets における n -skeletal / m -coskeletal の sharp な関係を与える。

また、対称単体集合に対する最近の計算として Hora–Kamio–Maehara [17] がある。site は今回の $[\mathbf{FinSet}, \mathbf{Set}]$ と一致しないが、「有限集合ベースの presheaf / functor category における levels の計算」という意味ではかなり近い空気を持っている。今回の

$$F_A \text{ は 3-coskeletal}$$

という主張は、この流れの中で読むのが自然である。

7 暫定的な位置づけ

今回の文献調査に基づく暫定的な位置づけは、おおむね次の通りである。

(1) 関手

$$F_A(X) = \{f : X \rightarrow A \mid \text{supp}(f) \text{ finite}\}$$

自体は classical であり、coalgebra / weighted transition system の文脈では既知である [4, 1]。

(2) これを $[\mathbf{FinSet}, \mathbf{Set}]$ の対象として見る viewpoint も classical であり、classifying topos of objects, finitary functors, Kan extension の一般論に乗っている [8, 9, 10, 11, 7, 16]。

(3) 一方で、

$$A \neq 1 \implies F_A \text{ is 3-coskeletal but not 2-coskeletal}$$

という明示的な statement は、今回確認した文献には少なくともそのままの形では見当たらない。

(4) 同様に,

$$\text{Nat}(F_A, F_B)$$

を任意の可換モノイド A, B に対して binary datum

$$p : A \times A \rightarrow B$$

と cocycle-like relation

$$p(ab, c) = p(a, bc)p(b, ac)$$

で completely describe する statement も、今回確認した範囲では明示的には見つからない。

(5) その最も近い published / preprint context は [1] であり、そこでは singly generated source monoid の場合が扱われ、finitely generated な場合は future work として残されている。したがって、今回の一般形は [1] を直接拡張する candidate result として位置づけるのが自然である。

8 実際に引用するならどう分けるか

論文やノートで実際に引用するなら、次のように分けるのが書きやすいと思う。

(1) 関手 F_A の定義そのものと coalgebra 的文脈：

[4, 1]

(2) multiset / finite powerset 的な special cases の自然変換：

[3, 1]

(3) $[\text{FinSet}, \text{Set}]$, classifying topos of objects, Kan extension：

[8, 9, 16]

(4) levels, skeleta, coskeleta, Aufhebung の一般論・計算例：

[12, 13, 14, 15, 17]

以上をまとめると、今回の話は

coalgebraic branching functors + $[\text{FinSet}, \text{Set}]$ の classifying topos viewpoint + levels / coskeleta

の三本を束ねる形になっている。closest prior work は Kori-Watanabe [1] であり、そこで未処理として残っている finitely generated / general commutative monoid case に、こちらの 3-coskeletality based な記述がちょうど噛み合っている、というのが現時点での最も自然な理解である。

参考文献

- [1] Mayuko Kori and Kazuki Watanabe, *A No-go Theorem for Coalgebraic Product Construction*, arXiv:2504.06592, 2025. To appear in FoSSaCS 2026.
- [2] Kazuki Watanabe, Sebastian Junges, Jurriaan Rot, and Ichiro Hasuo, *A Unifying Approach to Product Constructions for Quantitative Temporal Inference*, *Proc. ACM Program. Lang.* 9(OOPSLA1):1575–1603, 2025.
- [3] Fredrik Dahlqvist and Renato Neves, *Compositional semantics for new paradigms: probabilistic, hybrid and beyond*, arXiv:1804.04145, 2018.
- [4] H. Peter Gumm and Tobias Schröder, *Monoid-labeled transition systems*, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 44(1):185–204, 2001.
- [5] Jiří Adámek, H. Peter Gumm, and Vera Trnková, *Presentation of Set Functors: A Coalgebraic Perspective*, *Journal of Logic and Computation* 20(5):991–1015, 2010.
- [6] Jiří Adámek and Vera Trnková, *Automata and Algebras in Categories*, Kluwer, 1990.
- [7] Jiří Adámek and Jiří Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*, Cambridge University Press, 1994.
- [8] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1994.
- [9] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*, Cambridge University Press, 1994.
- [10] G. M. Kelly and A. J. Power, *Adjunctions whose counits are coequalizers, and presentations of finitary enriched monads*, *Journal of Pure and Applied Algebra* 89:163–179, 1993.
- [11] Stephen Lack and Jiří Rosický, *Notions of Lawvere theory*, *Applied Categorical Structures* 19(1):363–391, 2011.
- [12] F. William Lawvere, *Toposes generated by codiscrete objects in combinatorial topology and functional analysis*, *Reprints in Theory and Applications of Categories* 27:1–11, 2021.
- [13] Carolyn Kennett, Emily Riehl, Michael Roy, and Michael Zaks, *Levels in the toposes of simplicial sets and cubical sets*, *Journal of Pure and Applied Algebra* 215(5):949–961, 2011.
- [14] Matías Menni, *Monic skeleta, boundaries, Aufhebung, and the meaning of “one-dimensionality”*, *Theory and Applications of Categories* 34(25):714–735, 2019.
- [15] Matías Menni, *The successive dimension, without elegance*, *Proceedings of the American Mathematical Society* 152(3):1337–1354, 2024.
- [16] Yuhi Kamio and Ryuya Hora, *A solution to the first Lawvere’s problem: A Grothendieck topos that has a proper class many quotient topoi*, arXiv:2407.17105, 2024.

- [17] Ryuya Hora, Yuhi Kamio, and Yuki Maehara, *Lawvere's fourth open problem: Levels in the topos of symmetric simplicial sets*, arXiv:2503.03439, 2025.