

有限体上の A_2 QUIVER と WYTHOFF の手

CODEX

ABSTRACT. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の quiver $1 \rightarrow 2$ の表現を線形写像として分類する. 三つの indecomposable 表現の multiplicity から dimension vector への写像をとると, 一成分だけを減らす操作の存在量化商は Wythoff Nim の三方向の手と一致する. さらに, 同じ関係が Boolean Hall 積の dimension-vector shadow として表されることを示す. 本稿の結果は合法手の表現論的記述であり, Grundy 値の公式や高速計算を与えない.

1. 二つの有向グラフ

本稿では $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする.

定義 1.1 (Wythoff graph). Wythoff graph の頂点は $\mathbb{N}^2$ の元である. (a, b) から (a', b') へ辺があるとは, ある整数 $r \geq 1$ に対して

$$(a, b) - (a', b') \in \{r(1, 0), r(0, 1), r(1, 1)\}$$

が成り立つこと.

これは Wythoff の原論文 [1] の合法手を有向 graph として記したものである.

Q を quiver $1 \rightarrow 2$ とし, $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q}(Q)$ を有限次元表現の圏とする. その対象は有限次元 $\mathbb{F}_q$ -vector space の線形写像

$$M = (V_1 \xrightarrow{f} V_2)$$

であり, dimension vector を $\mathbf{dim} M = (\dim V_1, \dim V_2)$ と書く. 次の三表現を用いる.

$$S_1 = (\mathbb{F}_q \rightarrow 0), \quad S_2 = (0 \rightarrow \mathbb{F}_q), \quad E = (\mathbb{F}_q \xrightarrow{1} \mathbb{F}_q).$$

quiver representation の基本事項には Schiffler [2] と Kirillov [3] がある. 次の A_2 分類はその最小例であり, self-contained に証明する.

命題 1.2 (A_2 表現の分類). 任意の表現 $M = (V_1 \xrightarrow{f} V_2)$ に対し,

$$M \cong S_1^{\oplus u} \oplus E^{\oplus k} \oplus S_2^{\oplus v}, \quad (u, k, v) = (\dim \ker f, \text{rank } f, \dim \text{coker } f).$$

特に三つの multiplicity は一意である.

証明. $V_1 = \ker f \oplus U$ と分解する. $f|_U: U \rightarrow \text{im } f$ は同型である. さらに $V_2 = \text{im } f \oplus C$ と分解すると, f は零写像 $\ker f \rightarrow 0$, 同型 $U \rightarrow \text{im } f$, 零写像 $0 \rightarrow C$ の直和である. それぞれ基底を選べば表示を得る. 一意性は $\dim \ker f$, $\text{rank } f$, $\dim \text{coker } f$ が同型不変量であることによる. $\square$

2. MULTIPLICITY 錐の存在量化商

命題 1.2 に従い, multiplicity 錐を $C = \mathbb{N}^3$ とし,

$$\pi: C \longrightarrow \mathbb{N}^2, \quad \pi(u, k, v) = (u + k, k + v)$$

と定める. これは表現から dimension vector を取り出す写像である.

定義 2.1 (ray-deletion graph). C の元 x から y へ辺があるとは, $x - y$ が $r(1, 0, 0)$, $r(0, 1, 0)$, $r(0, 0, 1)$ のいずれかであることとする. ただし $r \geq 1$ である. π の存在量化商では, d から d' へ辺があるとは, $\pi(x) = d$, $\pi(y) = d'$, $x \rightarrow y$ を満たす $x, y \in C$ が存在することとする.

定理 2.2 (Wythoff graph の復元). π による ray-deletion graph の存在量化商は Wythoff graph と等しい.

証明. C で第 1, 第 2, 第 3 成分を r だけ減らすと, dimension vector はそれぞれ $r(1, 0)$, $r(1, 1)$, $r(0, 1)$ だけ減る. 従って商の辺は Wythoff の手である.

逆に (a, b) から第 1 座標を r だけ減らす手は $(a, 0, b) \rightarrow (a - r, 0, b)$ から得られ, 第 2 座標だけを減らす手も同様である. 両座標を r だけ減らす手は

$$(a - r, r, b - r) \longrightarrow (a - r, 0, b - r)$$

から得られる. これらの triple は, 対応する Wythoff の手が合法であるとき非負である. $\square$

Date: 2026 年 8 月 26 日, v0.1.

2020 Mathematics Subject Classification. 16G20, 91A46.

Key words and phrases. A_2 quiver, Hall algebra, Wythoff Nim, dimension vector.

3. BOOLEAN HALL SHADOW

Hall algebra と quiver representation の関係には Ringel [4], 定義からの導入には Schiffmann [5] がある. 有限体を仮定したため, 次の個数は有限である. 表現 U, V, X に対し, Hall number を

$$g_{U,V}^X = \#\{W \subseteq X \mid W \cong V, X/W \cong U\}$$

と定める. $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ を Boolean semiring とし, 表現の同型類を基底とする自由 $\mathbb{B}$ -semimodule 上で

$$[U] \star [V] = \bigvee_{g_{U,V}^X > 0} [X]$$

と定める. 有限和に対するこの積は, 通常の Hall 積の係数を「零か非零か」だけにしたものである. support A の dimension-vector shadow を

$$D(A) = \{\mathbf{dim} X \mid [X] \text{ が } A \text{ に現れる}\}$$

と書く.

補題 3.1. 任意の表現 U, V に対し,

$$D([U] \star [V]) = \{\mathbf{dim} U + \mathbf{dim} V\}.$$

証明. $g_{U,V}^X > 0$ なら短完全列 $0 \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow U \rightarrow 0$ が存在するため, $\mathbf{dim} X = \mathbf{dim} U + \mathbf{dim} V$ である. 逆に split 列 $0 \rightarrow V \rightarrow U \oplus V \rightarrow U \rightarrow 0$ が存在するので, 積の support は空でない. $\square$

定理 3.2 (Hall shadow と Wythoff の手). $d, d' \in \mathbb{N}^2$ に対し, d から d' への Wythoff の手が存在することと, ある $U \in \text{Rep}_{\mathbb{F}_q}(Q)$, $r \geq 1$, $T \in \{S_1, S_2, E\}$ が存在して

$$\mathbf{dim} U = d', \quad d \in D([U] \star [T^{\oplus r}])$$

が成り立つことは同値である.

証明. 補題 3.1 により右辺は $d - d' = r \mathbf{dim} T$ と同値である. 三つの T の dimension vector は $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ なので, これは定義 1.1 と一致する. 任意の d' をもつ表現 U は, 例えば対応する次元の零写像として存在する. $\square$

注意 3.3 (限界). 定理 3.2 では extension の同型類, Hall number の値, 有限体の位数 q を dimension-vector shadow が忘れている. 従って本稿の対応だけから Grundy 値, mex, 再帰計算の高速化は得られない. 本稿で証明したのは合法手の関係の厳密な表現だけである.

REFERENCES

- [1] W. A. Wythoff, A modification of the game of Nim, *Nieuw Arch. Wiskd.* (2) **7** (1907), 199–202.
- [2] R. Schiffler, *Quiver Representations*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2014. doi:10.1007/978-3-319-09204-1.
- [3] A. Kirillov, Jr., *Quiver Representations and Quiver Varieties*, Graduate Studies in Mathematics 174, American Mathematical Society, 2016. AMS GSM 174.
- [4] C. M. Ringel, Hall algebras and quantum groups, *Invent. Math.* **101** (1990), 583–592. doi:10.1007/BF01231516.
- [5] O. Schiffmann, Lectures on Hall algebras, arXiv:math/0611617, 2006.