Day convolution は層化と両立する

——層 F について $F(-+B)$ は層．鍵は $\ker(a+B)=\operatorname{im}\varphi\circ\operatorname{im}\varphi$——

2026-09-27

要点

$(\mathcal{E},\oplus,N\{*\})$ が対称 monoidal closed で $N\colon(\mathbf{Games},+)\to(\mathcal{E},\oplus)$ が強 monoidal であることは，Day の反映定理により「層 F と有限ゲーム B について $F(-+B)$ が層」に帰着する．09-26 版の証明「a_i+B が被覆を保つから」は不十分だった：$+$ は lex でないので $\ker(a+B)\neq\ker a+B$ であり，被覆の保存だけでは $F(A'+B)$ の元の貼り合わせ条件が $\ker(a+B)$ 上で成り立つことにならない．正しい鍵は補題 L：$\varphi\colon\ker a+B\to\ker(a+B)$ の像 S について $S\circ S=\ker(a+B)$（関係の合成）．証明は「最大の証拠 $M(x,x'')$」を使う $\ker(a+B)$ の位置に関する帰納法．

1　記法と定義

定義 1.1 (site と層〔前〕)**.** $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は有限ゲームの圏，J_{coh} は有限個の射の族で位置上 jointly surjective なものが生成する coverage．$\mathcal{E}=\mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}},J_{\mathrm{coh}})$，$N(X)=\mathbf{Games}(-,X)|_{\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}}$．$J_{\mathrm{coh}}$ は subcanonical（〔検算〕定理 2.3）．全射 $a\colon A'\twoheadrightarrow A$ 一つの被覆に対する層条件は，$K=\ker a=A'\times_A A'$ を用いて

$$F(A)\xrightarrow{a^*}F(A')\underset{\pi_2^*}{\overset{\pi_1^*}{\rightrightarrows}}F(K)$$

が equalizer であること（a が生成する sieve の matching family は $x\in F(A')$ で $af=ag\Rightarrow x{\cdot}f=x{\cdot}g$ を満たすもの；(f,g) は K を通るので $x\cdot\pi_1=x\cdot\pi_2$ と同値）．

定義 1.2 (Conway 和と Day convolution)**.** $X{+}Y$：台 $UX\times UY$, $\mathrm{succ}(x,y)=\mathrm{succ}\,x\times\{y\}\cup\{x\}\times\mathrm{succ}\,y$〔main.tex L2384 – 2450〕．$+$ は余積を各変数で保つ（$(\coprod A_i)+B=\coprod(A_i+B)$：台と succ が成分ごと）．前層 P,Q の Day convolution と内部 hom：

$$(P\star Q)(C)=\int^{A,B}P(A)\times Q(B)\times\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}(C,A+B),\qquad[P,F](A)=\int_B\mathbf{Set}\big(P(B),F(A+B)\big).$$

$a\colon[\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]\to\mathcal{E}$ を層化，$F\oplus G:=a(F\star G)$．

定義 1.3 (関係の合成と最大の証拠)**.** $A'+B$ 上の関係（部分ゲーム $S\rightarrowtail(A'+B)^2$）の合成 $S\circ S$ は $S\times_{A'+B}S\to(A'+B)^2$ の像．全射 $a\colon A'\twoheadrightarrow A$ と $ax=ax''$ なる $x,x''\in A'$ に対し，K の位置 $M(x,x'')$ を

$$M(x,x'')=\big(\{M(x_1,x_1'')\colon x_1\in\mathrm{succ}\,x,\ x_1''\in\mathrm{succ}\,x'',\ ax_1=ax_1''\},\ (x,x'')\big)$$

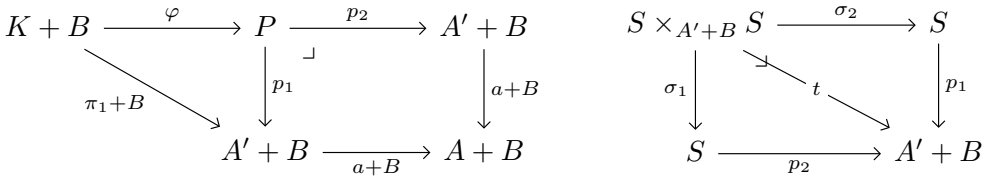
と再帰的に定める（a が coalgebra 射なので $a[\mathrm{succ}\, x] = \mathrm{succ}(ax) = a[\mathrm{succ}\, x'']$，よって両側全射で K の位置）．(x, x'') 上の K の位置のうち子集合が最大のもの．

2　主張

補題 2.1 (補題 L)**.** $a\colon A' \twoheadrightarrow A$ を $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の全射，$B \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$，$K = \ker a$，$P = \ker(a + B)$，$\varphi = \langle \pi_1 + B, \pi_2 + B \rangle\colon K + B \to P$，$S = \mathrm{im}\, \varphi$ とする．このとき $S \circ S = P$.

定理 2.2. 層 $F \in \mathcal{E}$ と $B \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ について $F(- + B)$ は層である．

系 2.3 (09-26 版 定理 3.3 の再証明)**.** *(1)* $[P, F] \in \mathcal{E}$（$F \in \mathcal{E}$，P 任意）．*Day* の反映定理（*Day,* A reflection theorem for closed categories*, JPAA 2 (1972)*）により $(\mathcal{E}, \oplus, N\{*\})$ は対称 *monoidal closed*，a は強 *monoidal*，$\oplus$ は各変数で余連続．*(2)* $N(A) \star N(B) = N(A + B)$（$A, B$ 有限），よって $N(A) \oplus N(B) = N(A + B)$．無限ゲームは *filtered* 余極限で．



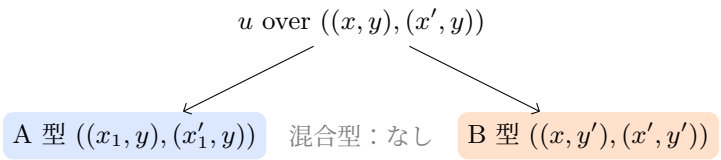
3　証明

■段 1：補題 L の主張の言い換え． この段で示すこと：$S \circ S = P$ は「P の各位置 u に対し $S \times_{A'+B} S$ の位置 z で $t(z) = u$ なるものがある」と同値．$S \circ S \subseteq P$ は $S \subseteq P$ と P が同値関係（kernel pair）であることから．逆は t の像が P の全位置を含むこと．$t(z)$ は再帰的に $t(z) = (\{t(z') : z' \in \mathrm{succ}\, z\},\ (p_1\sigma_1 z,\ p_2\sigma_2 z))$．使った事実：coalgebra 射は位置ごとに子集合の像で決まる．

■段 2：P の位置の子の型． この段で示すこと：$u \in P$ が $((x, y), (x', y))$ 上にあるとき（$(a+B)(x, y) = (a + B)(x', y')$ は $y = y'$ を含む），u の子は次の二型のみ．

- A 型：$((x_1, y), (x_1', y))$ 上，$x_1 \in \mathrm{succ}\, x$，$x_1' \in \mathrm{succ}\, x'$，$ax_1 = ax_1'$.
- B 型：$((x, y'), (x', y'))$ 上，$y' \in \mathrm{succ}\, y$.

混合型 $((x_1, y), (x', y'))$ はラベルの一致 $(ax_1, y) = (ax', y')$ を要するが $y' \in \mathrm{succ}\, y$ より $y' \neq y$（well-founded）で不可能．また u は両側全射なので，各 $y' \in \mathrm{succ}\, y$ に対し B 型の子が，各 $x_1 \in \mathrm{succ}\, x$（各 $x_1' \in \mathrm{succ}\, x'$）に対し A 型の子がある．使った事実：Conway 和の succ，積の位置の両側全射性，well-foundedness.



■段 3：帰納法の主張 (H)． この段で示すこと：$ax = ax'' = ax'$，$y \in B$，$u \in P$ が $((x,y),(x',y))$ 上のとき，$S \times_{A'+B} S$ の位置 z で

$$z \text{ は } \big(\varphi(M(x,x''),y),\ \varphi(M(x'',x'),y)\big) \text{ 上}, \qquad t(z) = u$$

なるものが存在する．u に関する well-founded 帰納法．$\varphi(M,y)$ は φ による位置 $(M,y) \in K + B$ の像で，S の位置．二つの中央成分はともに (x'',y) で一致するので pullback の位置の候補になる．

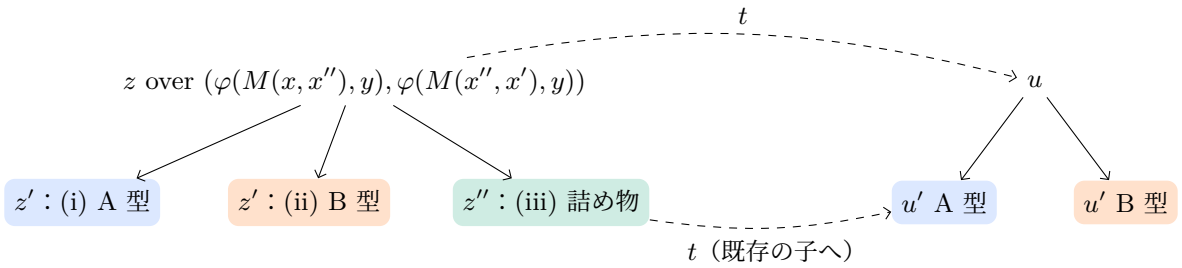
z の子の構成．

(i) u の A 型の子 u'（(x_1,x_1') 上）ごとに $x_1'' \in \operatorname{succ} x''$ で $ax_1'' = ax_1$ なるものを取り（全射性），(H) を (x_1,x_1'',x_1',y,u') に適用して z' を得る．z' は $(\varphi(M(x_1,x_1''),y),\varphi(M(x_1'',x_1'),y))$ 上で，これは $(\varphi(M(x,x''),y),\varphi(M(x'',x'),y))$ の子の対（$M(x_1,x_1'') \in \operatorname{succ} M(x,x'')$）．

(ii) u の B 型の子 u'（$y' \in \operatorname{succ} y$）ごとに (H) を (x,x'',x',y',u') に適用して z' を得る．z' は $(\varphi(M(x,x''),y'),\ \varphi(M(x'',x'),y'))$ 上で，これも子の対．

(iii) 詰め物．$\varphi(M(x,x''),y)$ の子で (i)(ii) の第 1 成分に現れないもの $\varphi(M(x_1,x_1''),y)$ に対し，u の A 型の子 u' で $(x_1,\cdot)$ 上のものを一つ取り（u の両側全射性），(H) を (x_1,x_1'',x_1',y,u') に適用した z'' を加える．第 2 成分側も同様．$t(z'') = u'$ は既に u の子なので $t(z)$ の子集合は増えない．

こうして z の子集合は両側全射（(iii) で保証），各子は pullback の位置（帰納法），ラベルは一致（中央 (x'',y)）．よって z は $S \times_{A'+B} S$ の位置．$t(z)$ の子集合は $\{u' : u' \in \operatorname{succ} u\}$，ラベルは $((x,y),(x',y))$，したがって $t(z) = u$．基底（u 終端）：x,x',y 終端，$ax'' = ax$ 終端より x'' も終端（$a[\operatorname{succ} x''] = \operatorname{succ}(ax'') = \emptyset$），$z$ 終端で $t(z) = u$．使った事実：段 2，a の全射性（(i) の x_1'' の存在），M の最大性（(i)(iii) で $\varphi(M(x_1,x_1''),y)$ が確かに $\varphi(M(x,x''),y)$ の子であること）．



■段 4：定理 2.2． この段で示すこと：$x \in F(A'+B)$ が $x \cdot (\pi_1 + B) = x \cdot (\pi_2 + B)$（$K + B$ 上）を満たせば，$F(A+B)$ の一意の元の制限である．まず有限族 $(a_i \colon A_i \to A)$ は $a = [a_i] \colon A' = \coprod A_i \twoheadrightarrow A$ に帰着する：$+$ が余積を保ち，層は $\coprod$ を $\prod$ に送る（N が余積を保つ〔前〕）ので，族に対する層条件と a に対する層条件は同値．$a + B$ は全射（$U(a+B) = Ua \times \mathrm{id}$）なので $F(A+B) \to F(A'+B) \rightrightarrows F(P)$ は equalizer．示すべきは $x \cdot p_1 = x \cdot p_2$．

(a) $\varphi \colon K + B \twoheadrightarrow S$ は全射（S が像），$x \cdot p_1 \cdot \varphi = x \cdot (\pi_1 + B) = x \cdot (\pi_2 + B) = x \cdot p_2 \cdot \varphi$．$F$ は分離的なので $x \cdot p_1|_S = x \cdot p_2|_S$．

(b) $t \colon S \times_{A'+B} S \twoheadrightarrow P$ は全射（補題 L）．$p_1 t = p_1 \sigma_1$，$p_2 t = p_2 \sigma_2$，$p_2 \sigma_1 = p_1 \sigma_2$ より

$$x \cdot p_1 \cdot t = x \cdot p_1 \cdot \sigma_1 \overset{(a)}{=} x \cdot p_2 \cdot \sigma_1 = x \cdot p_1 \cdot \sigma_2 \overset{(a)}{=} x \cdot p_2 \cdot \sigma_2 = x \cdot p_2 \cdot t.$$

F は分離的なので $x \cdot p_1 = x \cdot p_2$．

使った事実：補題 L，F の分離性（全射に沿う制限は単射），$a + B$ の全射性． □

■段 5：系 2.3. (1) $[P,F](A)=\int_B F(A+B)^{P(B)}$ は A について層 $F(-+B)$ の極限（end）なので層．Day の反映定理は，biclosed monoidal 圏の反映的充満部分圏が内部 hom で閉じていれば，反映された tensor $a(-\star-)$ で monoidal closed になり反映が強 monoidal になることを述べる．(2) 米田：$y(A)\star y(B)=\int^{A',B'}\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}(A',A)\times\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}(B',B)\times\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}(-,A'+B')=y(A+B)$．$J_{\mathrm{coh}}$ subcanonical で $y(A)=N(A)\in\mathcal{E}$，よって $N(A)\oplus N(B)=a(N(A+B))=N(A+B)$．無限ゲーム $X=\bigcup A_i$ は N が filtered 余極限を保ち〔前〕，$\oplus$ が余連続なので $N(X)\oplus N(Y)=\operatorname{colim}N(A_i+B_j)=N(X+Y)$． □

4 例：$A'=\mathrm{Star}_2\twoheadrightarrow\mathrm{Star}_1=A$，$B=\mathrm{Star}_1$

$K=\mathrm{Star}_2\times\mathrm{Star}_2$（根 7 個 w_C），P の根は $7\cdot127$ 個（`explain-conway-sum-not-lex`），$S=\operatorname{im}\varphi$ の根は $(C,\{v_C\})$ の 7 個．補題 L の言うこと：P の根 $u=(C',T)$（$T\subseteq\{v_C\}$ 空でない）は，S の根二つ $(C_1,\{v_{C_1}\})$，$(C_2,\{v_{C_2}\})$ を中央で貼った pullback の位置 z の像．x'' の自由度が「T に複数の v_C を入れる」自由度を吸収する：z の子には (v_{C_1},v_{C_2}) 型の対が複数入りうる．

	$S\times_{A'+B}S$ の位置 z	P の位置 $u=t(z)$
ラベル	$(\varphi(M(r,r),r'),\varphi(M(r,r),r'))$	$((r,r'),(r,r'))$
A 型の子	$(\varphi(M(t_i,t_k),r'),\varphi(M(t_k,t_j),r'))$	$((t_i,r'),(t_j,r'))$，$(i,j)\in C'$
B 型の子	$(\varphi(M(r,r),t),\varphi(M(r,r),t))$ 上の位置	$v_C\in T$

5 残る問い

- $\oplus$ の $\mathcal{E}$ 内での直接記述：$(X,R)\oplus(Y,S)$ は $N(X+Y)$ を $N(R+Y)$，$N(X+S)$ の像が生成する同値関係で割ったもの（09-26 版 (3)，$\mathcal{E}$ が exact なので成立）．
- 他の monoidal 構造（selective / conjunctive sum〔L2871〕）でも $\ker(a\otimes B)=\operatorname{im}\varphi\circ\operatorname{im}\varphi$ が成り立つか．Conway 和の証明は「混合型の子がない」ことを使ったので，各構造で確かめる必要がある．