ex/reg 完備化の一般論と Conway 和の $\mathcal{E}$ への拡張

——冪等性，topos になる条件，Menni・realizability との関係，Day convolution（2026-09-26）——

要点

ex/reg 完備化は冪等（exact なら $\mathrm{Map}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$，命題 1.1）だが ex/lex は冪等でない．$\mathcal{C}_{\mathrm{ex/reg}}$ が Grothendieck topos になる十分条件は「regular + infinitary extensive + 小さな生成集合」で（定理 1.3，**Games** はこの型），Menni の判定（生成的証明）は ex/lex 版であり ex/reg 版は文献未確認．Conway 和 $+$ は lex でない（命題 2.1）ので Map の 2-関手性では $\mathcal{E}$ に降りず，代わりに $(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, +)$ 上の Day convolution の層化 $\oplus$ として拡張される（定理 3.4）．種（species）・nominal 集合と同型の構造で，**Games** の「Day convolution の反映が Conway 和」（kobin sjfq7e）が $\mathcal{E}$ では反映なしに成り立つ．

1　ex/reg 完備化の一般論

命題 1.1 (冪等性)**.** $\mathcal{C}$ が *exact* なら $I\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Map}(\mathcal{C})$ は圏同値．逆関手は $(X, R) \mapsto X/R$.

証明. I は充満忠実（〔前〕定義 1.2 の射の条件で $R = \Delta$ のとき F は写像）. 本質的全射：exact なので R は $q\colon X \twoheadrightarrow X/R$ の kernel pair．関係 $F = \langle 1, q\rangle\colon X \rightsquigarrow X/R$ について $F \circ R = F$（q が R を同一視），$F^{\circ} \circ F = q^{\circ} \circ q = R$, $F \circ F^{\circ} = q \circ q^{\circ} = \Delta$（$q$ regular epi）．よって $F\colon (X, R) \to (X/R, \Delta)$ は Map の同型（逆は F°）. □

注意 1.2 (ex/lex は冪等でない)．Carboni – Vitale（*Regular and exact completions*, JPAA 125, 1998, Thm 16 付近）：$\mathcal{D} \simeq \mathcal{C}_{\mathrm{ex/lex}}$ となるのは $\mathcal{D}$ が exact で，有限極限で閉じる十分な projective をもつとき．$\mathcal{D}_{\mathrm{ex/lex}} \simeq \mathcal{D}$ となるのは $\mathcal{D}$ の対象がすべて projective のときに限る（例：**Set**）．たとえば $\mathbf{Set}_{\mathrm{ex/lex}} \simeq \mathbf{Set}$ だが，$\mathbf{Sh}(X)_{\mathrm{ex/lex}} \not\simeq \mathbf{Sh}(X)$（$X$ 非離散）．ex/reg は「同値関係の商」だけを足すので，すでに商があれば何も足さない．

定理 1.3 ($\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ が Grothendieck topos になる十分条件)**.** $\mathcal{C}$ が *(a) regular*，*(b) infinitary extensive*（小余積があり *disjoint* かつ *pullback* で普遍），*(c)* 小さな充満部分圏 $\mathcal{C}_0$ で「各 X は $\mathcal{C}_0$ の対象の族から *jointly regular-epi* で覆われる」を満たすとき，$\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ は *Grothendieck topos* である．逆に $\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ が *Grothendieck topos* なら *(a)(b)* は必要（$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Map}(\mathcal{C})$ が有限極限・余積・*regular epi* を反映する）.

証明（骨子；一般の場合は本稿で完全には検算していない）. Giraud の公理：exact，infinitary extensive，小生成集合．$\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ は構成から exact（Freyd – Scedrov）．余積：(X_i, R_i) の余積は $(\coprod X_i, \coprod R_i)$ で，(b) により $\coprod R_i \hookrightarrow \coprod X_i \times \coprod X_i$ が同値関係になり，pullback 安定性も (b) から従う．生成集合：$I(\mathcal{C}_0)$．**Games** については〔前〕で $\mathcal{E} = \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$ として直接示したのでこの骨子に依存しない. □

注意 1.4 (どのくらい珍しいか)．(i) この型の例：**Set** 上の accessible で weak pullback を保つ関手 F の余代数 $\mathbf{Coalg}(F)$（Worrell 学位論文 Cor 5.5.7：$\mathbf{Coalg}(F)_{\mathrm{ex/reg}}$ は topos，特に $F = P_f$ で recursive でない余代数の圏も含む）．$\mathbf{Games} = \mathrm{RecCoalg}(P_f)$ は Worrell の設定の充満部分圏で，同じ方法が通る．(ii) Lack（*A note on the exact completion of a regular category, and its infinitary generalizations*, TAC 5 (1999)，要旨確認済み）：任意の regular $\mathcal{C}$ に対し，ある層 topos $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ の中で $\mathcal{C}$ を有限極限と同値関係の商で閉じたものが $\mathcal{C}_{\mathrm{ex/reg}}$．これは〔前〕定理 2.1 の「$\mathcal{E}$ の対象は $N(X)/N(R)$ に尽きる」の一般形で，**Games** では「閉包 = 全体」が成り立つのが特別．(iii) Menni（*A characterization of the left exact categories whose exact completions are toposes*, JPAA 177 (2003) 287 – 301；nLab「generic proof」で確認）：$\mathcal{C}_{\mathrm{ex/lex}}$ が topos $\iff$ $\mathcal{C}$ は weak dependent product と generic proof（すべての proof がそこから引き戻せる射）をもつ．これは **ex/lex 版**であり，ex/reg 版の判定は本稿では文献未確認．**Games** では $\Omega_{\mathbf{Games}}$ の存在（部分対象分類子）が「generic subobject」を与えるが，ex/reg で必要なのは「generic *equivalence relation*」

的なものと予想（未確認）．(iv) Realizability：$\mathbf{Eff} \simeq \mathbf{Asm}_{\mathrm{ex/reg}}$（Carboni, *Some free constructions in realizability and proof theory*, JPAA 103, 1995）および $\mathbf{Eff} \simeq \mathbf{PAsm}_{\mathrm{ex/lex}}$（Robinson – Rosolini, *Colimit completions and the effective topos*, JSL 55, 1990）——本稿では記憶からの引用で**未検証**．構造の類比：**Asm** は regular で商が足りず，Ω をもたない；**Games** は regular で商が足りないが Ω をもつ．**Eff** は Grothendieck でなく，$\mathcal{E}$ は Grothendieck.

問い 1.5 (Menni に聞くこと)．(1) regular 圏 $\mathcal{C}$ について「$\mathcal{C}_{\mathrm{ex/reg}}$ が（elementary / Grothendieck）topos」の内在的判定は知られているか．特に「regular + 部分対象分類子」で十分か（**Games** は成立例）．(2) $\mathcal{E} = \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$ は前層 topos か（$\{*\}$ 以外の projective がないので否定的と予想）．(3) **Games** の Ω を $\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ の Ω が保つ現象（〔前〕定理 2.1(5)）の一般化：regular $\mathcal{C}$ が Ω をもてば $\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ の Ω は $I(\Omega)$ か.

2　Conway 和は $\mathcal{E}$ に降りるか

Games の Conway 和 $X+Y$ は台 $UX \times UY$，$\mathrm{succ}(x,y) = \mathrm{succ}\, x \times \{y\} \cup \{x\} \times \mathrm{succ}\, y$（Leibniz 型）〔main.tex L2384 – 2450〕．$(\mathbf{Games}, +, \{*\})$ は対称 monoidal closed〔L2030, L2871〕.

命題 2.1 ($+$ は lex でない)**.** $-+\mathrm{Star}_1$ は *pullback* を保たない．したがって Map の *regular* 圏上の *2*-関手性（*Carboni – Vitale*）は $+$ に適用できない.

証明．$K := \mathrm{Star}_2 \times_{\mathrm{Star}_1} \mathrm{Star}_2 = \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ は根の上に 7 個の位置 w_C（$C \subseteq \{t_1,t_2\}^2$ 両側全射）をもつ（〔検算〕補題 4.3）．$\mathrm{Star}_1 = \{r' \to t\}$ とし，二つのゲームを比べる．**左辺** $L := K + \mathrm{Star}_1$：根は (w_C, r') の 7 個，$\mathrm{succ}(w_C, r') = \mathrm{succ}\, w_C \times \{r'\} \cup \{(w_C, t)\}$．**右辺** $P := (\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1) \times_{\mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1} (\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1)$：**Games** の pullback は積の部分ゲーム（ラベルが一致し，子孫もすべて一致するもの）．$\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1$ の根 (r, r') の子は $(t_1, r'), (t_2, r'), (r, t)$ の 3 個で，$q+1$ はそれぞれ $(t, r'), (t, r'), (r', t)$ に写す．P の根 $((r,r'),(r,r'))$ 上の位置は enumerative な子集合 S で，S のラベルは両側全射に 3 元集合を覆い，かつ各子のラベル対が $q+1$ で一致するもの．一致するラベル対は $((t_i, r'), (t_j, r'))$ (4 種，各々の上の位置は一意) と $((r,t),(r,t))$ で，後者の上の P の位置は $\mathrm{succ}(r,t) = \{(t_1,t),(t_2,t)\}$ 上の両側全射な子集合，すなわち K の根と同じ 7 個ある．enumerative 条件はラベルにしか触れないので，S はこの 7 個から**空でない任意の部分集合**を含んでよい．よって P の根の位置は $7 \times (2^7 - 1)$ 個あり，L の根 7 個と一致しない．比較射 $\theta\colon L \to P$ は $(w_C, r') \mapsto S = \{C \text{ の 4 種}\} \cup \{w_C\}$ で，たとえば $S = \{\Delta\} \cup \{w_\Delta, w_{\text{全}}\}$ を子とする根は θ の像にない．□

注意 2.2．これは $U(X+Y) = UX \times UY$ だが $U(X \times Y) \neq UX \times UY$ であることの現れ．$+$ は余極限（〔前〕：U が余極限を創り $X * -$ が余連続〔L2871〕）と filtered 余極限（部分ゲームの合併）は保つ.

3　Day convolution としての拡張

定義 3.1. $(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, +, \{*\})$ は対称 monoidal 圏（$U(A+B) = UA \times UB$ は有限）．前層 $P, Q \in [\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ の Day convolution と内部 hom は

$$(P \star Q)(C) = \int^{A,B \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}} P(A) \times Q(B) \times \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}(C, A+B), \quad [P,F](A) = \int_{B \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}} \mathbf{Set}\big(P(B), F(A+B)\big).$$

(Day, *On closed categories of functors*, 1970)．$a\colon [\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{E}$ を層化とし，$F \oplus G := a(F \star G)$ と定める.

注意 3.2 (2026-09-27 訂正)．下の補題 3.3 の証明は不十分である．$+$ は lex でないので $\ker(a+B) \neq \ker a + B$ であり，被覆の保存だけでは $F(-+B)$ の層条件（$\ker(a+B)$ 上の貼り合わせ条件）は出ない．正しい証明は `explain-day-convolution-sheaf-2026-09-27`（補題 L：$\mathrm{im}\,\varphi \circ \mathrm{im}\,\varphi = \ker(a+B)$）にある．主張自体（$F(-+B)$ が層，定理 3.4）は正しい．また末尾の Leibniz 則の問いは否定的に解決した（`explain-species-nominal-analogy-2026-09-27`：$F = G = N\mathrm{Star}_1$ で左辺 6 元，右辺 2 元）.

補題 3.3. $(a_i\colon A_i \to A)_i$ が J_{coh}-被覆なら，任意の $B \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ について $(a_i + B\colon A_i + B \to A + B)_i$ も J_{coh}-被覆．したがって任意の層 F と B について $F(-+B)$ は層である.

証明. $U(a_i + B) = Ua_i \times \mathrm{id}_{UB}$ で，(Ua_i) が jointly surjective なら $(Ua_i \times \mathrm{id})$ もそう．$F(- + B)$ の層条件は A の被覆を $A + B$ の被覆に送って F の層条件を使えばよい． □

定理 3.4. *(1)* $(\mathcal{E}, \oplus, N\{*\})$ は対称 *monoidal closed* 圏で，内部 *hom* は前層の $[F, G]$ そのもの（層になる）．a は強 *monoidal*，$\oplus$ は各変数で余連続．

(2) $N\colon (\mathbf{Games}, +) \to (\mathcal{E}, \oplus)$ は強 *monoidal*：$N(X) \oplus N(Y) \cong N(X + Y)$．有限ゲームでは層化すら不要：$N(A) \star N(B) = N(A + B)$.

(3) $(X, R) \oplus (Y, S)$ は $N(X + Y)$ の，$N(R + Y)$ と $N(X + S)$ の像が生成する同値関係による商.

証明. (1) Day の反映定理（Day, *A reflection theorem for closed categories*, JPAA 2, 1972）：対称 monoidal closed 圏の反映的充満部分圏 $\mathcal{E} \subseteq [\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ が，反映された tensor $a(- \star -)$ で monoidal closed になる $\iff$ $F \in \mathcal{E}$，任意の P について $[P, F] \in \mathcal{E}$．後者は $[P, F] = \int_B F(- + B)^{P(B)}$ が層の極限（end）であること，および補題 3.3 から従う．余連続性は左随伴 $- \oplus G \dashv [G, -]$ から．(2) 表現可能関手の Day convolution は $y(A) \star y(B) = y(A + B)$（米田と余エンドの計算）．$J_{\mathrm{coh}}$ は subcanonical（〔検算〕定理 2.3）なので $N(A) = y(A)$ は層で，$N(A) \star N(B) = N(A + B)$．無限ゲーム $X = \bigcup_i A_i$（有限部分ゲームの filtered 合併）については $X + Y = \bigcup_{i,j}(A_i + B_j)$（$A_i \times B_j$ は Conway succ で下方閉），N が filtered 余極限を保ち（〔前〕），$\oplus$ が各変数で余連続なので $N(X) \oplus N(Y) = \operatorname{colim} N(A_i) \oplus N(B_j) = \operatorname{colim} N(A_i + B_j) = N(X + Y)$．(3) $(X, R) = \mathrm{coeq}(N(R) \rightrightarrows N(X))$ と各変数の余連続性から，$(X, R) \oplus (Y, S)$ は $N(X + Y)$ を，$N(R) \oplus N(Y) = N(R + Y)$ および $N(X + S)$ の二本の射の像で割った商（$\mathcal{E}$ は exact なので生成する同値関係による商）． □

注意 3.5. kobin `sjfq7e`「**Games** の Conway 和は Day convolution の反映 $X + Y \cong L(NX \star NY)$」の続き：$\mathcal{E}$ では反映 L なしに $NX \oplus NY = N(X + Y)$ が成り立ち，しかも $\oplus$ は **Games** の外の対象 (X, R) にも定義される．Map の 2-関手性で降ろせない（命題 2.1）代わりに，site の monoidal 構造で降ろした.

4 種・nominal 集合との構造的類似

	種（Joyal 1981）	nominal 集合（Schanuel topos）	$\mathcal{E}$
site	**FinBij**，$\sqcup$	$\mathbf{FinInj}^{\mathrm{op}}$，atomic 位相，$\sqcup$	$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$，$J_{\mathrm{coh}}$，$+$
tensor	Cauchy 積 $F \cdot G$（Day）	separated 積 $F * G$（Day の層化）	$F \oplus G$（Day の層化）
右随伴	$[y(1), -] = F(- + 1) = F'$	$[y(1), -]$（atom 抽象と関係）	$[N\mathrm{Star}_1, -] = F(- + \mathrm{Star}_1)$
Leibniz	$(F \cdot G)' = F'G + FG'$（成立）	atom-shift の Leibniz	**問い**（下）
Games 側の像	台 $UX \times UY$	—	$\mathrm{succ}(x, y) = \mathrm{succ}\, x \times \{y\} \cup \{x\} \times \mathrm{succ}\, y$

三者はいずれも「有限対象の圏の余積 $\sqcup$（$+$）に沿う Day convolution を，位相で層化したもの」であり，$\mathcal{E}$ はその圏が **ゲーム**で位相が coherent という一例である．**Games** の Conway 和の Leibniz 形〔L2384 – 2450〕は，site の $+$ が「積の台に Leibniz 型の succ」であることの反映.

問い 4.1 (Leibniz 則). $D := [N\mathrm{Star}_1, -]$，$DF(A) = F(A + \mathrm{Star}_1)$ について $D(F \oplus G) \cong DF \oplus G \;\sqcup\; F \oplus DG$ が成り立つか．種で成立するのは **FinBij** で $A + 1 \to B + C$ が「1 の行先で二分される」からで，$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ では射 $A + \mathrm{Star}_1 \to B + C$ の像の分解を要する（$+$ が lex でないので自明でない，命題 2.1）．Rota – Baxter 型の関係〔L2400 付近〕を $\mathcal{E}$ でどう定式化するかも未着手．Loregian – Trimble（*Differential 2-rigs*, arXiv:2103.00938）の differential 2-rig の枠で，$(\mathcal{E}, \oplus, D)$ が公理を満たすかを確かめるのが次の一手.

5 残る問い

(a) ex/reg 版の Menni 判定（定理 1.3 の逆向き，内在的条件）.

(b) Realizability の引用の裏取り（Carboni 1995，Robinson – Rosolini 1990）.

(c) Leibniz 則（上の問い）と，$\mathcal{E}$ の differential 2-rig 構造.

(d) **Games** の他の monoidal 構造（selective / conjunctive sum，〔L2871〕）も同じ機構で $\mathcal{E}$ に降りる（U が strict monoidal なら被覆保存は同じ論法）．内部 hom の **Games** 内での記述は不明のまま〔L2465 – 2495〕，$\mathcal{E}$ では $[NX, NY](A) = \int_B \mathbf{Set}(\mathbf{Games}(B, X), \mathbf{Games}(A + B, Y))$ と明示できるので，これが N の像に入るかで

Games の内部 hom が読める.