$\mathrm{Map}(\mathbf{Games}) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$ の証明

——「有限圏上の層」と「exact completion」が同じものになること（2026-09-26）——

要点

Games の exact completion $\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ は，有限ゲームの圏 $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ 上の coherent 位相（有限 jointly surjective 族）の層 topos と同値である（定理 2.1）．鍵は二つ：**(i)** 表現前層 $N(X) = \mathbf{Games}(-, X)|_{\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}}$ の部分層はすべて部分ゲームから来る（補題 3.1），**(ii)** N は余積を保つ（補題 3.2）．この二つで「層 topos の対象は $N(X)$ の同値関係による商に尽き，その間の射は **Games** の関係に尽きる」が出て，McLarty – Freyd – Scedrov の Map の記述と一致する．**Games** 自身が topos にならないのは，同値関係の商が **Games** からはみ出るからである（系 2.2）．

1　記法と定義

Games は recursive P_f-coalgebra の圏 〔main.tex L1444〕，$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ はその有限対象の充満部分圏（本質的に小）．前メモ（`topos-checks-1-4-proofs-2026-09-26.md`，以下〔検算〕）で示した事実を使う：**Games** は完備・余完備〔L2734, L2856〕，mono = 単射 = 部分ゲーム〔L2998〕，部分ゲームの引き戻しは逆像〔L2962〕，射の像は部分ゲーム〔L2751〕，$\downarrow x$ は有限〔L2769〕，regular であり epi = regular epi = 全射（〔検算〕定理 2.2），$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は有限非空極限・有限余極限で閉じる（終対象 V は無限なので $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ に含まれない）（〔検算〕補題 0.3），infinitary extensive（〔検算〕定理 3）．

定義 1.1 (coherent 位相)**.** $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の対象 A 上の sieve が J_{coh}-被覆であるとは，有限個の射 $a_i \colon A_i \to A$ で $\bigcup_i a_i(A_i) = A$ となるものを含むこと．J_{coh} は Grothendieck 位相で，任意の（無限でもよい）ゲーム X について $N(X) := \mathbf{Games}(-, X)|_{\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}}$ は J_{coh}-層である（〔検算〕定理 2.3）．$\mathcal{E} := \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$ と書く．

定義 1.2 ($\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$，McLarty；Worrell 学位論文 §5.5 の記述に従う)**.** regular 圏 $\mathcal{C}$ の関係 $F \colon X \rightsquigarrow Y$ とは部分対象 $F \rightarrowtail X \times Y$ のこと．合成 $F' \circ F$ は引き戻し $F \times_Y F' \to X \times Z$ の像，逆 F° は成分の入れ替え，射 f はそのグラフ $\langle 1, f \rangle$ と同一視する．$\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ の対象は同値関係 (X, R)，射 $(X, R) \to (Y, S)$ は関係 $F \colon X \rightsquigarrow Y$ で

$$F \circ R = F = S \circ F, \qquad R \le F^\circ \circ F, \qquad F \circ F^\circ \le S$$

を満たすもの．合成は関係の合成，恒等射は R 自身．埋め込み $I \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Map}(\mathcal{C})$ は $X \mapsto (X, \Delta_X)$，$f \mapsto \langle 1, f \rangle$．$\mathrm{Map}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{C}$ の ex/reg completion であることは Freyd – Scedrov（*Categories, Allegories*）および Carboni – Vitale（*Regular and exact completions*, JPAA 125, 1998）による（本稿では引用のみ．本稿の定理はこの同定に依存しない）．

記法 1.3 (regular 圏の関係計算)**.** 以下は regular 圏で成り立つ標準的事実（Freyd – Scedrov 第 2 章；Johnstone, *Elephant* A3.1 – A3.3）：合成は結合的で順序を保つ；射 f について $f^\circ \circ f \ge 1$，$f^\circ \circ f$ は f の kernel pair；$f \circ f^\circ = 1 \iff f$ は regular epi；同値関係 R が射 e の kernel pair なら $e^\circ \circ e = R$.

2　主張

定理 2.1. $N \colon \mathbf{Games} \to \mathcal{E}$ について次が成り立つ．

(1) N は充満忠実で，すべての極限と *regular epi*（全射）を保つ．したがって像と関係の合成・逆・順序を保つ．

(2) $N(X)$ の $\mathcal{E}$ における部分対象は，X の部分ゲーム S による $N(S)$ にちょうど一致する（補題 *3.1*）．

(3) N は小余積を保つ（補題 *3.2*）．

(4) $\Phi \colon \mathrm{Map}(\mathbf{Games}) \to \mathcal{E}$，$(X, R) \mapsto N(X)/N(R)$（$\mathcal{E}$ における商）は圏同値である．

(5) $\mathcal{E}$ の部分対象分類子は $N(\Omega_{\mathbf{Games}})$，$\Omega_{\mathbf{Games}}$ は *truth-closed* な *HF* 集合のゲーム〔*L3663*〕．
特に $\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ は *Grothendieck topos* であり，Ω を保って **Games** を含む．

系 2.2. $N(\mathbf{Games}) \subset \mathcal{E}$ は極限・*filtered* 余極限・余積・部分対象で閉じるが，同値関係の商では閉じない．$\mathcal{E}$ の各対象は $N(X)$ の同値関係による商であり，$\mathcal{E}$ は「**Games** を同値関係の商で閉じたもの」である（*Lack* の記述の小 *site* 版）．

系 2.3（層側）**.** $\mathbf{Games} \simeq \mathrm{Ind}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}) \simeq \mathrm{Lex}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ は前層圏の反映的部分圏だが，どの位相 J についても $\mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J) \simeq \mathbf{Games}$ にはならない（**Games** は *exact* でない．〔検算〕定理 *4*）．*Di Liberti – Ramos González Lemma 3.16*（$\mathcal{C}$ が *pro-exact* $\iff$ $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ が *exact*；$\mathcal{C}$ は有限余極限をもつ小圏）により $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は *pro-exact* でない．

3　証明

段 1：N は充満忠実

示すこと：(1) の充満忠実性．忠実：$f \neq g\colon X \to Y$ が x で異なれば，$\downarrow x \hookrightarrow X$ への制限が異なる．充満：自然変換 $\alpha\colon N(X) \to N(Y)$ をとり，$\iota_x\colon \downarrow x \hookrightarrow X$ について $f(x) := \alpha_{\downarrow x}(\iota_x)(x)$ と定める．$x' \in \mathrm{succ}\, x$ なら $j\colon \downarrow x' \hookrightarrow \downarrow x$ に沿う自然性から $\alpha_{\downarrow x}(\iota_x) \circ j = \alpha_{\downarrow x'}(\iota_{x'})$，よって $\alpha_{\downarrow x}(\iota_x) = f|_{\downarrow x}$．これは射なので $\mathrm{succ}(fx) = f[\mathrm{succ}\, x]$，つまり f は射．任意の $g\colon A \to X$（A 有限）と $a \in A$ について $g\iota_a = \iota_{g(a)} \circ g'$（$g'\colon \downarrow a \to \downarrow g(a)$）と分解し，$g'$ に沿う自然性から $\alpha_A(g)(a) = \alpha_{\downarrow g(a)}(\iota_{g(a)})(g'(a)) = f(g(a))$．よって $\alpha = N(f)$．**使った事実**：$\downarrow x$ が有限〔L2769〕．

段 2：N は極限と全射を保つ

示すこと：(1) の残り．極限：$\mathbf{Games}(A, -)$ は極限を保ち，層の極限は各点で計算される．全射 $q\colon X \to Y$ について $N(q)$ が $\mathcal{E}$ の epi であること：層の射が epi $\iff$ 局所全射（MacLane – Moerdijk III.7）．有限 A と $g\colon A \to Y$ に対し引き戻し $P = A \times_Y X$ は有限（〔検算〕補題 0.3）で，$p\colon P \to A$ は全射（〔検算〕定理 2.2）．$\{p\}$ は J_{coh}-被覆で $g \circ p = q \circ p'$ は q を経由する．$\mathcal{E}$ は topos なので epi = regular epi．N は mono（引き戻しで定義される）と regular epi を保つので像分解を保ち，関係の合成（引き戻しの像）・逆・順序を保つ．充満忠実性から順序を反映もする．**使った事実**：〔検算〕定理 2.2，補題 0.3．

段 3：部分層は部分ゲームから来る（補題 3.1）

補題 3.1. $\mathcal{E}$ における $N(X)$ の部分対象 $F \rightarrowtail N(X)$ は，ただ一つの部分ゲーム $S \subset X$ について $F = N(S)$ である．

証明. 層の部分対象は「閉じた」部分前層，すなわち $F \subset N(X)$ で，J_{coh}-被覆 $(a_i\colon A_i \to A)$ について $fa_i \in F(A_i)$ $(\forall i)$ なら $f \in F(A)$ を満たすもの（MacLane – Moerdijk III.7）．$S := \bigcup\{f(A) : A \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}},\ f \in F(A)\}$ とおく．像は部分ゲームで，部分ゲームの和は部分ゲームなので S は部分ゲーム．$F \subset N(S)$ は明らか．逆に $f\colon A \to X$，$f(A) \subset S$ とする．$a \in A$ をとると，$f(a) = g(b)$ となる有限 B，$g \in F(B)$，$b \in B$ がある．$g\iota_b \in F(\downarrow b)$（部分前層）．$\downarrow a \times_X \downarrow b$ を作る（図 1）．$f\iota_a$ と $g\iota_b$ はともに部分ゲーム $\downarrow f(a)$ の上へ全射なので，p は全射（〔検算〕定理 2.2；X 上の引き戻しと $\downarrow f(a)$ 上の引き戻しは錐が同じなので一致する）．$\{p\}$ は被覆で $f\iota_a p = g\iota_b p' \in F(P)$，閉性から $f\iota_a \in F(\downarrow a)$．最後に $(\iota_a)_{a \in A}$ は有限 jointly surjective 族なので閉性から $f \in F(A)$．一意性は $S = \bigcup_{f \in F} f(A)$ が F から決まることから．□

$$\begin{array}{ccccc} P = \downarrow a \times_X \downarrow b & \xrightarrow{p'} & \downarrow b & \xhookrightarrow{\iota_b} & B \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle g\iota_b} & & \downarrow{\scriptstyle g \in F(B)} \\ \downarrow a & \xrightarrow[f\iota_a]{} & \downarrow f(a) \subset X & = & X \end{array}$$

図 1　段 3．p は全射（全射の引き戻し）．F が閉じていることを $\{p\}$ と $(\iota_a)_a$ の二段で使う．

段 4：N は余積を保つ（補題 3.2）

補題 3.2. $(A_i)_{i\in I}$ をゲームの族とすると，標準射 $c\colon \coprod_i N(A_i) \to N(\coprod_i A_i)$（$\mathcal{E}$ の余積から）は同型.

証明. c が epi：有限 B と $g\colon B \to \coprod A_i$ について，extensivity から $B = \coprod_i g^{-1}(A_i)$（有限個が非空）で，各 $g|_{g^{-1}(A_i)}$ は A_i を経由する．よって g は被覆 $(g^{-1}(A_i) \hookrightarrow B)_i$ 上で局所的に c を経由し，c は局所全射．c が mono：topos では余積は universal かつ disjoint なので，c の kernel pair は

$$\coprod_{i,j} N(A_i) \times_{N(\coprod A)} N(A_j) = \coprod_{i,j} N(A_i \times_{\coprod A} A_j) = \coprod_i N(A_i),$$

ここで N が引き戻しを保つこと（段 2），**Games** の余積が disjoint であること（〔検算〕定理 3：$i \neq j$ なら $A_i \times_{\coprod A} A_j = \emptyset$）と $N(\emptyset) = 0_{\mathcal{E}}$（$\emptyset$ は空族で被覆されるので層は $F(\emptyset) = 1$，$N(\emptyset)(B) = \emptyset$ $(B \neq \emptyset)$）を使った．kernel pair が対角なので c は mono．topos は balanced なので c は同型. □

段 5：Φ は圏同値

対象．$R \rightarrowtail X \times X$ が **Games** の同値関係なら，N が有限極限を保つので $N(R) \rightarrowtail N(X) \times N(X)$ は $\mathcal{E}$ の同値関係．$\mathcal{E}$ は exact なので商 $e_X\colon N(X) \to N(X)/N(R)$ があり，その kernel pair は $N(R)$，したがって $e_X^\circ \circ e_X = N(R)$，$e_X \circ e_X^\circ = 1$.

射. exact 圏 $\mathcal{E}$ において，射 $g\colon N(X)/N(R) \to N(Y)/N(S)$ と，定義 1.2 の三条件を（$\mathcal{E}$ で）満たす関係 $F'\colon N(X) \rightsquigarrow N(Y)$ は，$g \mapsto e_Y^\circ \circ g \circ e_X$，$F' \mapsto e_Y \circ F' \circ e_X^\circ$ で一対一に対応し，合成を保つ（図 2）．計算：$F' := e_Y^\circ g e_X$ について $F' \circ N(R) = e_Y^\circ g e_X e_X^\circ e_X = F'$，$F'^\circ F' = e_X^\circ g^\circ e_Y e_Y^\circ g e_X = e_X^\circ g^\circ g e_X \geq e_X^\circ e_X = N(R)$，$F'F'^\circ = e_Y^\circ g e_X e_X^\circ g^\circ e_Y \leq e_Y^\circ g g^\circ e_Y \leq e_Y^\circ e_Y = N(S)$．逆に三条件を満たす F' から $g := e_Y F' e_X^\circ$ を作ると $gg^\circ = e_Y F' N(R) F'^\circ e_Y^\circ = e_Y F' F'^\circ e_Y^\circ \leq e_Y N(S) e_Y^\circ = 1$，$g^\circ g = e_X F'^\circ N(S) F' e_X^\circ = e_X F'^\circ F' e_X^\circ \geq e_X N(R) e_X^\circ = 1$ なので g は射（写像）．二つの対応は互いに逆（$ee^\circ = 1$ と $e^\circ e = N(R)$，$F'N(R) = F'$ を使う）．合成：$(e_Z^\circ h e_Y)(e_Y^\circ g e_X) = e_Z^\circ h\, g\, e_X$.

充満忠実. 補題 3.1 により $N(X)\times N(Y) = N(X\times Y)$ の部分対象は $N(F)$（$F \subset X\times Y$）に尽き，段 2 により三条件は F について **Games** で成り立つことと $N(F)$ について $\mathcal{E}$ で成り立つことが同値．よって $\mathrm{Map}(\mathbf{Games})((X,R),(Y,S)) \to \mathcal{E}(\Phi(X,R),\Phi(Y,S))$ は全単射で，合成を保つ.

本質的全射．$F \in \mathcal{E}$ をとる．F は表現層の余積 $\coprod_{(A,s)} N(A)$（A は $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の骨格を，s は $F(A)$ を走る）の商であり（MacLane – Moerdijk III.7；$N(A)$ は層なので層化で変わらない），補題 3.2 により $N(X) \twoheadrightarrow F$，$X := \coprod_{(A,s)} A$ を得る．その kernel pair $K \rightarrowtail N(X\times X)$ は 補題 3.1 により $N(R)$ で，N が有限極限を保ち充満忠実（順序を反映）なので R は **Games** の同値関係．$\mathcal{E}$ は exact なので $F \simeq N(X)/N(R) = \Phi(X,R)$.

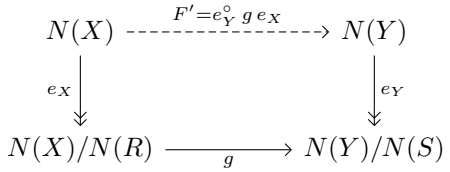


図 2　段 5．破線は関係．F' は「g を代表元の上に持ち上げた関係」で，写像とは限らない.

段 6：部分対象分類子

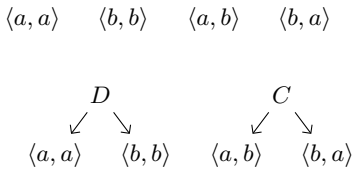
示すこと：(5)．regular 圏で $e\colon X \twoheadrightarrow X/R$ が同値関係 R の商なら，$\mathrm{Sub}(X/R) \cong \{T \in \mathrm{Sub}(X) : R\circ T \leq T\}$（$T \mapsto \exists_e T$，$S \mapsto e^*S$；$e^*\exists_e T = R\circ T$ は Frobenius，$\exists_e e^* S = S$ は e が cover）．$F = N(X)/N(R)$ に適用し，補題 3.1 と段 2 で $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(F) \cong \{T \subset X$ 部分ゲーム $: R\circ T \leq T\}$．一方 $\mathcal{E}(F, N(\Omega_{\mathbf{Games}})) = \{\chi\colon X \to \Omega_{\mathbf{Games}} : \chi p_1 = \chi p_2 \text{ on } R\}$（$e_X$ が coequalizer，N 充満忠実）$= \{T \subset X : p_1^{-1}T = p_2^{-1}T\}$，これは R の対称性から $R\circ T \leq T$ と同値．対応は $\top\colon 1 = N(1_{\mathbf{Games}}) \to N(\Omega_{\mathbf{Games}})$ の引き戻しで与えられる（e_X^* が単射なので e_X に沿って確かめればよい）．よって $N(\Omega_{\mathbf{Games}})$ は $\mathcal{E}$ の部分対象分類子．**使った事実**：$\Omega_{\mathbf{Games}}$ が **Games** の部分対象分類子 〔L3663〕．Worrell Prop. 5.5.8（McLarty Lemma 25.23）の議論と同じ.

系の証明

系 2.2：閉性は段 2・補題 3.2・補題 3.1 と，N が filtered 余極限を保つこと（A が有限表示 〔L2783〕）．商で閉じないこと：〔検算〕定理 4 の $R \subset \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$（6 元）について $N(\mathrm{Star}_2)/N(R) \simeq N(Z)$ とすると，$N(\mathrm{Star}_2) \twoheadrightarrow N(Z)$ は充満性から $N(q')$，q' は全射（そうでなければ像 $Z' \subsetneq Z$ について $N(q')$ が真部分対象 $N(Z')$ を経由し epi でない），kernel pair は $N(\ker q') = N(R)$ で $R = \ker q'$，R が effective でないことに反する．系 2.3：$\mathrm{Ind}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}) \simeq \mathbf{Games}$ は lfp 〔L2848〕．**Games** が exact でない（〔検算〕定理 4）ので topos でなく，Lemma 3.16 の対偶で $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は pro-exact でない．

4　例

$R = \Delta \cup \Gamma_\sigma \subset \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$（〔検算〕§4）の 6 元と対応表を 図 3 に示す．$\Phi(\mathrm{Star}_2, R) = N(\mathrm{Star}_2)/N(R)$ は $\mathcal{E}$ の対象だが N の像にない．一方 $q\colon \mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_1$ の kernel pair K（11 元）について $\Phi(\mathrm{Star}_2, K) \simeq N(\mathrm{Star}_1)$．また q は分裂しない（$s(t) = a$ とすると $\mathrm{succ}(sr') = \{a, b\} \neq \{a\} = s[\mathrm{succ}\, r']$）ので，$\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ の射 $I(\mathrm{Star}_1) \to (\mathrm{Star}_2, K)$（$q^\circ$ のグラフ）は写像でない関係で表される．これが 定義 1.2 の射を関係にとる理由である．



定義 1.2 のデータ	この例	$\mathcal{E}$ での対応物
(X, R)	$(\mathrm{Star}_2, \Delta \cup \Gamma_\sigma)$	$N(\mathrm{Star}_2)/N(R)$，表現層でない
(X, K)，K effective	$(\mathrm{Star}_2, \mathrm{Star}_2^2)$	$N(\mathrm{Star}_1)$
写像でない射	$q^\circ\colon I(\mathrm{Star}_1) \to (\mathrm{Star}_2, K)$	$N(\mathrm{Star}_1) \simeq N(\mathrm{Star}_2)/N(K)$ の逆

図 3　左：R の 6 元．上段 4 つは終端元（高さ 0），$D = \Delta(r)$，$C = \Gamma_\sigma(r)$ は根 (r, r) の元（高さ 1）．同名の葉は同じ元．$D \neq C$ なので $|R| = 6$．右：定義 1.2 のデータとの対応．

5　残る問い

- $\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ が **Games** の ex/reg completion であること（定義 1.2 の引用）は本稿で検証していない．定理 2.1 は $\mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ を 定義 1.2 の圏として証明した．
- $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は coherent 圏（部分ゲームの有限和が引き戻しで安定）なので $\mathcal{E}$ は coherent topos で，$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の pretopos completion がその coherent 対象になるはず（Johnstone, *Elephant* D3.3；未検証）．$\mathcal{E}$ が前層 topos か，Menni の generic proof を **Games** がもつかは未解決．
- Di Liberti – Ramos González Lemma 3.16 は原論文 Carboni – Pedicchio – Rosický Th. 19 の κ 版で，証明は「有限版と同じ」とだけ書かれている．一次資料未確認．