種・nominal 集合との類似と，微分 $D = F(- + \mathrm{Star}_1)$

——三者は同型の構成だが，$\mathcal{E}$ で Leibniz 則は成り立たない——

2026-09-27

要点

種（**FinBij**, Cauchy 積），nominal 集合（Schanuel topos, separated 積），$\mathcal{E}$（$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$, $\oplus$）はいずれも「有限対象の圏の $\sqcup$ に沿う Day convolution を層化したもの」で，$D = [\,y(1), -]$, $DF = F(-+1)$ が微分の候補．$\mathcal{E}$ では $D(N\mathrm{Star}_1) = N\{*\}$（「$x' = 1$」）だが，Leibniz 則 $D(F \oplus G) \cong DF \oplus G \sqcup F \oplus DG$ は $F = G = N\mathrm{Star}_1$ で**破れる**：左辺は Star_2 で 6 元，右辺は 2 元．理由：種では $A + 1 \to B + C$ が「1 の行先」で二分されるが，$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ では Star_1 の一手が位置ごとに B 側・C 側のどちらへも落ちうる．

1　記法と定義

定義 1.1 (三つの site)**.**

- 種：$[\mathbf{FinBij}, \mathbf{Set}]$（Joyal 1981）．Cauchy 積 $(F \cdot G)(n) = \coprod_{n=S\sqcup T} F(S) \times G(T)$ は $(\mathbf{FinBij}, \sqcup)$ の Day convolution．位相は自明．
- nominal 集合：Schanuel topos $\mathrm{Sh}(\mathbf{FinInj}^{\mathrm{op}}, J_{\mathrm{at}})$．separated 積 $F * G$ は $\sqcup$ の Day convolution の層化（Pitts, *Nominal Sets*, 2013 と記憶；未再読）．
- $\mathcal{E} = \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$．$F \oplus G = a(F \star G)$, $\star$ は $(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, +)$ の Day convolution（`explain-day-convolution-sheaf`）．N は強 monoidal で余積を保つ〔前〕．

定義 1.2（微分）**.** 単位対象 1（一点集合，一点，Star_1）に対し $D := [\,y(1), -]$．内部 hom の式 $[P, F](A) = \int_B \mathbf{Set}(P(B), F(A + B))$ と米田から $DF(A) = F(A + 1)$.

定義 1.3 (coalgebra 射と高さ)**.** $f \colon X \to Y$ が **Games** の射であるとは $\mathrm{succ}(fx) = f[\mathrm{succ}\, x]$ を満たす写像．帰納法で高さ $h(fx) = h(x)$（終端は終端へ）．

2　主張

■対応表.

	種	nominal 集合	$\mathcal{E}$
site	**FinBij**, $\sqcup$	$\mathbf{FinInj}^{\mathrm{op}}$, $\sqcup$, atomic	$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$, $+$, J_{coh}
tensor	$F \cdot G$（Day）	$F * G$（Day の層化）	$F \oplus G$（Day の層化）
D	$F(-+1) = F'$	$F(-+1)$	$F(-+\mathrm{Star}_1)$
$D\,y(1)$	$y(0)$ =単位	—	$N\{*\}$ =単位
Leibniz	成立	未再読	**不成立**（定理 2.2）

命題 2.1 (種の Leibniz 則)**.** $(F \cdot G)(n+1) = \coprod_{n+1=S\sqcup T} F(S) \times G(T)$ で，追加した点 $*$ は S か T のちょうど一方に入る．よって $(F \cdot G)' = F' \cdot G \sqcup F \cdot G'$.



$* \in S : F' \cdot G$　　$* \in T : F \cdot G'$

定理 2.2 ($\mathcal{E}$ で Leibniz 則は成り立たない)**.** $F = G = N\mathrm{Star}_1$ に対し $D(F \oplus G) \ncong DF \oplus G \sqcup F \oplus DG$. 実際 $D(N\mathrm{Star}_1) = N\{*\}$ であり，Star_2 での値は

$$D(N\mathrm{Star}_1 \oplus N\mathrm{Star}_1)(\mathrm{Star}_2) = \mathbf{Games}(\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1,\ \mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1) \quad \text{は } 6 \text{ 元},$$
$$(DF \oplus G \sqcup F \oplus DG)(\mathrm{Star}_2) = \mathbf{Games}(\mathrm{Star}_2,\ \mathrm{Star}_1 \sqcup \mathrm{Star}_1) \quad \text{は } 2 \text{ 元}.$$

3　証明

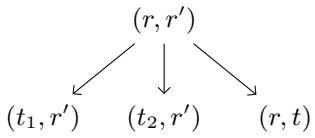
■段 1：$D(N\mathrm{Star}_1) = N\{*\}$.　この段で示すこと：$\mathbf{Games}(A + \mathrm{Star}_1, \mathrm{Star}_1)$ は A が離散（全位置終端）なら一点，そうでなければ空．$A + \mathrm{Star}_1$ の位置 (a, r') は子 (a, t) をもつので高さ $h(a) + 1$．射は高さを保ち Star_1 の高さは 1 なので，射が存在するには $h(a) + 1 \le 1$，すなわち全 a が終端．離散なら $(a, r') \mapsto r'$，$(a, t) \mapsto t$ の一つだけ．$N\{*\}(A) = \mathbf{Games}(A, \{*\})$ も「A 離散なら一点，さもなくば空」．よって $D(N\mathrm{Star}_1) = N\{*\}$，$\oplus$ の単位．使った事実：高さの保存.

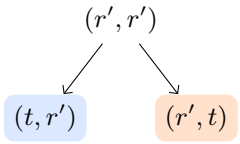
■段 2：右辺の計算.　$DF \oplus G = N\{*\} \oplus N\mathrm{Star}_1 = N\mathrm{Star}_1$（単位），同様に $F \oplus DG = N\mathrm{Star}_1$．$N$ は余積を保つので右辺 $= N(\mathrm{Star}_1 \sqcup \mathrm{Star}_1)$．$\mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_1 \sqcup \mathrm{Star}_1$ は根をどちらかの r' に送り，子は決まる：2 元．使った事実：N が余積を保つ〔前〕，強 monoidal.

■段 3：左辺の計算.　$N\mathrm{Star}_1 \oplus N\mathrm{Star}_1 = N(\mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1)$（強 monoidal）. $DN(\mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1)(\mathrm{Star}_2) = \mathbf{Games}(\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1, \mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1)$．位置を高さ別に並べる：

高さ	$\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1$	$\mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1$
2	(r, r')	(r', r')
1	(t_1, r'), (t_2, r'), (r, t)	(t, r'), (r', t)
0	(t_1, t), (t_2, t)	(t, t)

射 f は高さを保つので $f(r, r') = (r', r')$，終端は (t, t) へ．高さ 1 の 3 位置は $\{(t, r'), (r', t)\}$ のどちらへ送ってもよい（どちらの succ も $\{(t, t)\}$ で条件を満たす）が，根の条件 $f[\mathrm{succ}(r, r')] = \mathrm{succ}(r', r') = \{(t, r'), (r', t)\}$ から**両方を使う**：$2^3 - 2 = 6$ 通り.





3 位置 $\to$ 2 色，両色を使う
$2^3 - 2 = 6$ 通り

右辺の像$= (t_1, r'), (t_2, r')$ が同色，
(r, t) が他色：2 通り．
残り 4 通りは $(t_1, r'), (t_2, r')$ が別色

使った事実：Conway 和の succ，高さの保存．

■段 4：結論． $\mathcal{E}$ の対象として同型なら各 $A \in \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ で値が同型．Star_2 で $6 \neq 2$. □

■何が起きているか． 比較射 $DF \oplus G \sqcup F \oplus DG \to D(F \oplus G)$ は「Star_1 の一手を常に左（常に右）の因子へ落とす」射から来る．$\mathbf{Games}(\mathrm{Star}_2 + \mathrm{Star}_1, \mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1)$ の 6 元のうち，(r, t)（Star_1 の一手）と (t_i, r')（Star_2 の一手）が異なる側へ落ちるものが右辺の像：$(r, t) \mapsto$ 橙，$(t_1, r'), (t_2, r') \mapsto$ 青，およびその逆の 2 元．残り 4 元は (t_1, r') と (t_2, r') が異なる側へ落ちる射で，これは「Star_2 の二つの手が別々の因子へ」という，種にはない自由度．種で Leibniz が成り立つのは **FinBij** の射が点ごとに行先を決め，しかも「A の点の行先」が $F \cdot G$ の分解 $S \sqcup T$ に固定されるから．$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ では A の位置の行先も分解に固定されない．

4　残る問い

- Leibniz に代わる規則．左辺 $D(F \oplus G)$ は右辺より大きい．種の形ではなく，$(\mathbf{Games}, +)$ の内部 hom $[\mathrm{Star}_1, X + Y]$ の記述〔main.tex L2465 – 2495〕を通して「Star_1 の一手が各位置でどちらへ落ちるか」を含む形になるはず．$[\mathrm{Star}_1, \mathrm{Star}_1 + \mathrm{Star}_1]$ を有限ゲームとして書き下すのが次の一手．
- main.tex §5.1 の Leibniz 型 $\mathrm{succ}(x, y) = \mathrm{succ}\, x \times \{y\} \cup \{x\} \times \mathrm{succ}\, y$〔L2384 – 2450〕は位置の一手の分解であり，D の Leibniz 則とは別物．Rota – Baxter 型の関係〔L2400 付近〕を $\mathcal{E}$ でどう定式化するかは未着手．Loregian – Trimble（*Differential 2-rigs*, arXiv:2103.00938）の公理のどれが $(\mathcal{E}, \oplus, D)$ で破れるかを確かめる．
- nominal 集合側の引用（Pitts 2013）の再読．