$\mathcal{E} = \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}}) \simeq \mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ の性質

——何を分類するか，点，Boolean・localic の否定，対象のゲーム的解釈（2026-09-26）——

要点

$\mathcal{E}$ は coherent topos では**ない**（終対象 $1 = N(V)$ が quasi-compact でない，命題 2.1）が，「高さ $< n$」の部分終対象 $N(V_{<n})$ による開被覆をもち，各開部分 topos $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}/N(V_{<n})$ は coherent（定理 2.2）．したがって $\mathcal{E}$ は geometric 理論「有限ゲームの coherent 理論 + 無限選言公理 $\top \vdash \bigvee_n$(高さ $< n$)」を分類し，点を十分にもつ．$\mathcal{E}_1 = \mathbf{Set}$ は稠密な開点で $\mathrm{Sh}_{\neg\neg}\mathcal{E} = \mathbf{Set}$（命題 3.1）．Boolean でも localic でもない（命題 3.2）．対象 (X, R) は「ゲーム X と，双模倣の証拠の体系 R」で，商が $\mathbf{Games}$ に存在するのは R が「すべての証拠」のときに限る．$\mathrm{Star}_2/\mathbb{Z}_2$ が最小の非 $\mathbf{Games}$ 対象である（§ 5）．

1　記法

前 PDF（`explain-map-games-coherent-sheaves-2026-09-26.tex`，以下〔前〕）の記法を引き継ぐ：$\mathbf{Games}$, $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$，$N(X) = \mathbf{Games}(-, X)|_{\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}}$，$\mathcal{E} = \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$，$\Phi\colon \mathrm{Map}(\mathbf{Games}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}$，$(X, R) \mapsto N(X)/N(R)$．〔前〕定理 2.1 で示した事実：$N$ は充満忠実，極限・全射・余積・filtered 余極限を保ち，$\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(NX) = \{NS : S \subseteq X \text{ 部分ゲーム}\}$，$\Omega_{\mathcal{E}} = N(\Omega_{\mathbf{Games}})$．$h(x)$ は位置 x の高さ（木の深さ），射は高さを保つ（〔検算〕補題 0.1）．V は終ゲーム（HF 集合全体，succ $= \ni$）(main.tex L2734)，$V_{<n} \subseteq V$ は rank $< n$ の HF 集合のなす有限部分ゲーム．Star_n は根 r と n 個の終端位置 $t_1, \ldots, t_n$ からなる高さ 1 のゲーム．

2　分類する理論：coherent ではなく geometric

命題 2.1. $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は有限積・*equalizer*・有限余積をもつが終対象をもたない．$\mathcal{E}$ の終対象 $1 = N(V)$ は *quasi-compact* でない．したがって $\mathcal{E}$ は *coherent topos* ではない．

証明．$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の終対象は V の有限部分ゲームでなければならず，V は無限（すべての Star_n を含む）なので存在しない．有限積・equalizer は〔検算〕補題 0.3．$\mathcal{E}$ で $\{N(A) \to N(V) : A \subseteq V \text{ 有限部分ゲーム}\}$ は epi 族（$V = \bigcup A$，N が余積と全射を保つ）．有限部分族 $A_1, \ldots, A_k$ の像は $N(A_1 \cup \cdots \cup A_k)$ で，$A_1 \cup \cdots \cup A_k$ は高さ有界（$< m$）だから $\mathrm{Star}_m \subseteq V$ の根を含まない．よって jointly epi でなく，1 は quasi-compact でない．coherent topos は 1 が quasi-compact（Johnstone, *Elephant* D3.3）．□

定理 2.2（高さによる開被覆）．$U_n := N(V_{<n}) \rightarrowtail 1$ は部分終対象で，$U_1 \leq U_2 \leq \cdots$，$\bigvee_n U_n = 1$．開部分 *topos* $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}/U_n$ について

$$\mathcal{E}_n \;\simeq\; \mathrm{Sh}(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}/V_{<n},\, J_{\mathrm{coh}}) \;\simeq\; \mathrm{Sh}\big((\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}})_{<n},\, J_{\mathrm{coh}}\big),$$

ここで $(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}})_{<n}$ は高さ $< n$ の有限ゲームの充満部分圏．各 $\mathcal{E}_n$ は *coherent topos* であり，*Deligne* の定理により点を十分にもつ．よって $\mathcal{E}$ も点を十分にもつ．

証明．**部分終対象**：$\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(1) = \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(NV) = \{NS : S \subseteq V\}$（〔前〕）．$V_{<n} \subseteq V$ は部分ゲーム（$\in$ で下方閉），$\bigcup_n V_{<n} = V$ なので $\bigvee U_n = N(V) = 1$（部分対象の合併は N が余積・像を保つことから $N(\bigcup)$）．**スライス**：Grothendieck topos の開部分 topos $\mathcal{E}/N(B)$ は site $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}/B$（$B$ 上の射を対象とする）に誘導位相を入れた層 topos に同値（*Elephant* C2.2，site のスライス）．射 $A \to V_{<n}$ の存在は「A の高さ $< n$」と同値（V は終対象なので一意射 $A \to V$ があり，高さ保存によりその像は $V_{<h(A)+1}$ に入る）．一意性から $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}/V_{<n} \simeq (\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}})_{<n}$．*coherent*：$(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}})_{<n}$ は終対象 $V_{<n}$ をもち，有限積（高さは max）・equalizer で閉じるので有限極限をもつ．J_{coh} は有限 jointly surjective

族で生成され，〔検算〕定理 2.3 により pullback で安定．よって $(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}})_{<n}, J_{\mathrm{coh}}$ は coherent site．**点**：開部分 topos の点は $\mathcal{E}$ の点．$\mathcal{E}$ の対象 F について $F \neq 0$ なら $F \times U_n \neq 0$ となる n があり（$\bigvee U_n = 1$ と $\times$ の余極限保存），$\mathcal{E}_n$ の点で分離される．□

系 2.3 (分類する理論)**.** $\mathcal{E}$ の点（**Set** 上）は，$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ 上の J_{coh}-連続な *flat* 関手 $F\colon \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}} \to \mathbf{Set}$，すなわち *(i)* 有限極限を保ち（$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ には有限積・*equalizer* がある），*(ii)* 有限 *jointly surjective* 族を *jointly surjective* 族に写し，*(iii)* 各 $x \in F(A)$ がある n について $F(A \to V_{<n})$ を通る，もの．$\mathcal{E}$ が分類する *geometric* 理論 $\mathbb{T}$ は，各 $\mathcal{E}_n$ の *coherent* 理論 $\mathbb{T}_n$（*Diaconescu*；Elephant *D3.1.1*）に無限選言公理 $\top \vdash \bigvee_n [\text{高さ} < n]$ を足したもので，*coherent* 理論には**ならない**（命題 *2.1*）．

証明. flat = filtered な圏の元（$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ に終対象がないので「有限極限保存」だけでは足りず，F の元の圏が空でないこと，すなわち (iii) が要る）．(iii) は $\bigvee U_n = 1$ を点が保つことに他ならない．残りは Diaconescu の定理．□

3 $\mathcal{E}_1 = \mathbf{Set}$ と稠密な点

命題 3.1. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}/N(\{*\}) \simeq \mathbf{Set}$ であり，$U_1 = N(\{*\}) \rightarrowtail 1$ は稠密（$\neg\neg U_1 = 1$）．よって $\mathrm{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_1 = \mathbf{Set}$．対応する点は $T\colon \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$，$T(NX) = \{x \in X : \mathrm{succ}\, x = \emptyset\}$（終端位置）．

証明. $(\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}})_{<1}$ = 高さ 0 の有限ゲーム = 有限離散集合 = **FinSet**，J_{coh} は有限 jointly surjective 族．$\mathrm{Sh}(\mathbf{FinSet}, J_{\mathrm{coh}}) \simeq \mathbf{Set}$（余積を保つ関手は $F(1)$ で決まり，$1 \in \mathbf{FinSet}$ は J_{coh} で「点」）．稠密性：$\mathrm{Sub}(1) = \{NS : S \subseteq V\}$ で，V の空でない部分ゲームは下方閉だから $\emptyset \in S$，すなわち $N(\{*\}) \leq NS$．よって $U_1 \wedge NS \neq 0$ for all $NS \neq 0$，これは $\neg U_1 = 0$．点 $T : \mathcal{E}_1 \simeq \mathbf{Set}$ の唯一の点を $\mathcal{E}$ に持ち上げたもの．T は $N(\{*\}) = \mathbf{Games}(-, \{*\})|_{\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}}$ が表す関手で，前段の開点の逆像は $\mathcal{E}(N\{*\}, -)$ であり，したがって余極限を保つ．また $N(\{*\})$ は projective である（終端位置は全射で持ち上がる）．□

命題 3.2 (Boolean でも localic でもない)**.** *(1)* $\mathcal{E}$ は *Boolean* でない：$N(\{t_1\}) \rightarrowtail N(\mathrm{Star}_1)$ は補元をもたない．*(2)* $\mathcal{E}$ は *localic* でない：$N(\mathrm{Star}_2)$ は部分終対象たちの商ではない．*(3)* $\mathcal{E}$ の *localic* 反映は，V の部分ゲーム（$\in$-下方閉な *HF* 集合の集合）のなす *frame* 上の層 = *poset* $(V_\omega, \in^+)$ 上の前層 *topos*．その点は *HF* 集合である．

証明. (1) $\mathrm{Sub}(N\mathrm{Star}_1) = \{$ 部分ゲーム $\} = \{\emptyset, \{t_1\}, \mathrm{Star}_1\}$（$\{r\}$ は下方閉でない）．$\{t_1\}$ の補元 S は $\{t_1\} \cap S = \emptyset$，$\{t_1\} \cup S = \mathrm{Star}_1$ を要するが，該当なし．(2) localic なら各対象は部分終対象の余積の商．$N(\mathrm{Star}_2)$ に射をもつ部分終対象 NS（$S \subseteq V$）は，$S \to \mathrm{Star}_2$ の存在から S の高さ ≤ 1，かつ $S \subseteq V$ の高さ 1 の元は $\{\emptyset\} = \mathrm{Star}_1$ の根で，$\mathrm{Star}_1 \to \mathrm{Star}_2$ は存在しない（succ の濃度は増えない，全射で写す必要）．よって $S \subseteq \{\emptyset\}$，射の像は $\{t_1\}$ または $\{t_2\}$ の中．部分終対象の余積からの射は根 r を覆えない．(3) localic 反映は $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$ の frame 上の層（*Elephant* A4.6.2）．$\mathrm{Sub}(1) = \{S \subseteq V\}$，$S$ は $\in$-推移的閉包で下方閉，これは poset $(V_\omega, \in^+)$（$\in$ の推移閉包）の下方閉集合 = Alexandrov 開集合．よって層 topos は前層 topos $[(V_\omega, \in^+)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ に等しく，点は完全 filter，整礎性から主 filter = HF 集合．□

4 点の例：終端位置と Stone ゲーム

命題 4.1. *(1)* 有限離散ゲーム A の像 $N(A)$ は *projective* である．A が n 点なら $\mathcal{E}(N(A), -) \cong T(-)^n$ であり，この関手が点の逆像関手となるのは $n = 1$ の場合だけである．非空連結 *projective* の一般分類はここでは主張しない．*(2)* S を空でない *perfect* な *Stone* 空間（孤立点なしのコンパクト全不連結 *Hausdorff*）とする．

$$F_S(X) := \{(x, e) : x \in X,\ \mathrm{succ}\, x \subseteq \text{終端位置},\ e\colon S \twoheadrightarrow \mathrm{succ}\, x \text{ 連続全射}\}$$

は $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ 上の関手として $\mathcal{E}$ の点（有限極限保存・J_{coh}-連続・*(iii)*）である．F_S は U_2 に含まれ U_1 に含まれない．

証明の骨子. (1) $N(A)$ は $N(\{*\})$ の有限余積なので projective．対応する Hom 関手は $T(-)^n$ である．$n > 1$ では $(\{0\} \sqcup \{1\})^n$ に両方の成分を使う組があるため余積を保たず，$n = 0$ では空対象を保たない．$n = 1$ は 命題 3.1

の点である．なお $\mathrm{Star}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{Star}_1$ は全射だが $\mathrm{Star}_1 \to \mathrm{Star}_2$ は存在せず，$N(\mathrm{Star}_1)$ は projective でない．これだけではすべての非離散ゲームについての分類は得られない．(2) **積**：x, y が高さ ≤ 1 のとき，$X \times Y$ の (x, y) 上の位置は「両成分に全射な $C \subseteq \mathrm{succ}\, x \times \mathrm{succ}\, y$」に対応する（enumerative HF 集合 〔L3335〕）．$(x, e), (y, e')$ に対し $C = \mathrm{im}\langle e, e'\rangle$，$\langle e, e'\rangle \colon S \twoheadrightarrow C$ を対応させ，逆に (C, e'') に $(x, \pi_1 e''), (y, \pi_2 e'')$ を対応させると互いに逆なので $F_S(X \times Y) \cong F_S(X) \times F_S(Y)$．equalizer は部分ゲームなので明らか．$J_{\mathrm{coh}}$**-連続**：$(a_i \colon A_i \to A)$ を jointly surjective，$(x, e) \in F_S(A)$ とする．$a_i x' = x$ となる i, x' をとると $a_i \colon \mathrm{succ}\, x' \twoheadrightarrow \mathrm{succ}\, x$（有限全射）．$S_t := e^{-1}(t)$（$t \in \mathrm{succ}\, x$）は空でない clopen で perfect だから，$|a_i^{-1}(t)|$ 個の空でない clopen に分割でき，$e' \colon S \twoheadrightarrow \mathrm{succ}\, x'$ で $a_i e' = e$ となるものが作れる．よって $(x', e') \mapsto (x, e)$．(iii) は $h(x) \leq 1$． □

注意 4.2. S が 1 点のときは $F_S =$「終端位置 x を 1 つだけ子にもつ位置」を数える関手で，これは Star_1 の表す関手ではない（Star_1 は projective でない）．すべての点が「Stone 空間を分岐にもつ profinite ゲーム」で尽くされるかは **未確認**.

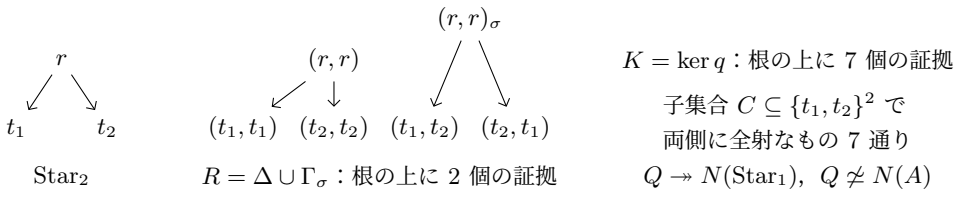
5 対象のゲーム的解釈

定義 5.1 (双模倣の証拠)**.** $(X, R) \in \mathrm{Map}(\mathbf{Games})$ とは，ゲーム X と，$X \times X$ の部分ゲーム R であって反射・対称・推移なもの．R の元は組 (x, x') にラベルされた HF 集合であり，その子の集合が $\mathrm{succ}\, x \times \mathrm{succ}\, x'$ に両側全射することが「x と x' が双模倣的である証拠（対応表）」を再帰的に与える．すなわち R の元は**ゲーム間の双模倣の証明木**.

命題 5.2. (X, R) の商が $\mathbf{Games}$ に存在する（$(X, R) \simeq N(Y)$）のは，R が射 $q \colon X \to Y$ の *kernel pair* であるとき，すなわち R が「q で同一視される位置の間の**すべての**証明木」を含むときに限る．$\mathbf{Games}$ にない対象は，証明木の一部だけを採用した商である．

証明. $\mathcal{E}$ で $N(X)/N(R) \simeq N(Y)$ なら $N(R)$ は $N(X) \to N(Y)$ の kernel pair，N が極限を反映するので $R = \ker q$. 逆は〔前〕. □

例 5.3 ($\mathrm{Star}_2/\mathbb{Z}_2$：最小の非 $\mathbf{Games}$ 対象)**.** $\sigma \colon \mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_2$ を $t_1 \leftrightarrow t_2$ の入れ替え，$R = \Delta \cup \Gamma_\sigma$（〔検算〕§4 の 6 元同値関係）．$Q := N(\mathrm{Star}_2)/N(R)$ は $\mathcal{E}$ の対象で，$Q \not\simeq N(A)$（$A \in \mathbf{Games}$）．一方 $q \colon \mathrm{Star}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{Star}_1$ の kernel pair $K = \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ は根の上に 7 元（〔検算〕補題 4.3）をもち，$N(\mathrm{Star}_1) = N(\mathrm{Star}_2)/N(K)$ は Q の商である．



解釈：Q は「Star_2 の 2 つの終端位置を，対称 σ による同一視**だけ**を認めて貼り合わせたゲーム」．$\mathbf{Games}$ では貼り合わせると自動的に全証拠 K が入り Star_1 になる．$Q \twoheadrightarrow N(\mathrm{Star}_1)$ は商だが，$N(\mathrm{Star}_1) \to Q$ は存在しない（`explain-objects-as-games-2026-09-27` 命題 2.2 (3)．初版の「Star_1 を retract にもつ」は誤りで訂正した）．Q は $N(\mathrm{Star}_1)$ より「太い」．一般に，有限群 G の X への作用による商 $N(X)/N(\Delta \cup \bigcup_g \Gamma_g)$ は，G が終端位置を非自明に置換する限り $\mathbf{Games}$ の外にある．

6 残る問い

(a) $\mathcal{E}$ の点が 命題 4.1 型（Stone 空間による分岐をもつ「profinite ゲーム」）で尽くされるか．

(b) $\mathcal{E}$ が前層 topos になるか（$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の J_{coh} が rigid かどうか）．有限離散ゲームはすべて projective であるが，これだけで projective な生成系の有無は決まらない．非空連結 projective の分類を含め未確認.

(c) 分類理論 $\mathbb{T}$ の明示的な公理系（〔前〕の $\mathrm{Sub}(NX) =$ 部分ゲームを使えば，ソート = 有限ゲーム，関数記号 $= \mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ の射，公理 = 有限被覆，で書けるはず）.

(d) 群作用商 $N(X)/G$ と multiset 分岐ゲームとの対応（$\mathrm{Star}_2/\mathbb{Z}_2$ は「子を multiset $\{t, t\}$ にもつ位置」に見える）.