検算項目 1〜4 の証明（2026-09-26）

`topos-sheaves-exact-completion-2026-09-26.md` §3 の検算項目 1〜4 を証明する。結論：Games は regular かつ（無限）extensive で、全射はすべて kernel pair の coequalizer、coherent 位相 J_{coh} は $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ 上の subcanonical な Grothendieck 位相、しかし Games は exact でなく、$\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は pro-exact でない。記法は前二つのメモと同じ（〔L n〕は `main.tex` の行）。

0. 使う事実と記法

- (F1) game は無限 path をもたない P_f 余代数 (X, succ)。射 $f : X \to Y$ は $\mathrm{succ}(fx) = f[\mathrm{succ}\, x]$ を満たす写像〔L1444〕。
- (F2) $U : \mathbf{Games} \to \mathbf{Set}$ は保存的で小余極限を創る〔L2734 – 2742〕。右随伴 $H_{(-)}$（cofree game）をもつ〔L2888, L2945〕。よって U は余極限を保ち、同型を反映する。H_Λ への射は label 写像 $UX \to \Lambda$ と一対一〔L2945〕。
- (F3) mono = 単射 = 部分ゲーム（下方閉部分集合）〔L2998〕。部分ゲームの引き戻しは逆像〔L2962〕。したがって、射 $f : Z \to Y$ が部分ゲーム $S \subset Y$ を経由する $\Leftrightarrow f(Z) \subset S$。
- (F4) Games は完備・余完備〔L2856, L2734〕で、(Epi, Mono) 分解をもつ〔L3071〕。
- (F5) 積 $X \times Y$ は、$(X \times Y)$-labelled HF 集合 $(S, (x, y))$ のうち enumerative なもの（S の元がすべて enumerative で、S の元の X-label 全体が $\mathrm{succ}\, x$、Y-label 全体が $\mathrm{succ}\, y$ に一致）のなす $H_{X\times Y}$ の部分ゲーム〔L3335 – 3352、revmemo 内の Definition と Proposition〕。射影 p_1, p_2 は label の成分。
- 高さ $h(x) = \sup\{h(x') + 1 : x' \in \mathrm{succ}\, x\}$。有限分岐と well-founded 性から $h(x)$ は有限で、$\downarrow x$（x の生成する部分ゲーム）は有限〔L2769〕。

補題 0.1（射は高さを保つ）。$f : X \to Y$ が射なら $h(fx) = h(x)$。証明。$h(x)$ についての帰納法。$h(fx) = \sup\{h(y') + 1 : y' \in \mathrm{succ}(fx)\} = \sup\{h(fx') + 1 : x' \in \mathrm{succ}\, x\} = \sup\{h(x') + 1 : x' \in \mathrm{succ}\, x\} = h(x)$。□

補題 0.2（epi = 全射）。Games の射 $f : X \to Y$ について、f が epi $\Leftrightarrow Uf$ が全射。証明。$\Leftarrow$ は U が忠実だから。$\Rightarrow$：$f = m \circ e$ と (Epi, Mono) 分解し、$S = f(X) \subset Y$ を部分ゲームとする (F3)。$S \neq Y$ なら、pushout $Y \sqcup_S Y$（余完備）を考える。U は余極限を創るので、その台集合は集合の pushout で、二つの入射は $Y \setminus S$ の上で異なる。二つの入射は f と合成すると一致するので f は epi でない。□

補題 0.3（有限ゲームの積は有限）。X, Y が有限なら $X \times Y$ は有限。証明。(F5) の enumerative 元 $(S, (x, y))$ の高さは、帰納法で $h(x)$ に等しい（子の X-label 全体が $\mathrm{succ}\, x$）。よって $X \times Y$ の元の高さは $\max h(X)$ 以下。有限集合 $X \times Y$ で label された高さ n 以下の HF 集合は有限個（高さ 0 は $|X \times Y|$ 個、高さ $n+1$ 以下は $|X \times Y| \cdot 2^{(\text{高さ } n \text{ 以下の個数})}$ 個以下）。□ 系。有限ゲームの pullback と equalizer は有限（積の部分ゲームだから）。よって $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ は有限非空極限をもつ。終対象（すべての HF 集合のゲーム）は無限なので $\mathbf{Games}_{\mathrm{fin}}$ には含まれず、有限極限全体をもつという主張ではない。lfp の一般論から有限余極限ももつ。

1. 項目 1：U は weak pullback を保つ

定理 1。$f : X \to Z, g : Y \to Z$ を Games の射、(P, p_1, p_2) をその pullback、$S = \{(x, y) \in \mathrm{UX} \times \mathrm{UY} : fx = gy\}$ を集合の pullback とする。比較写像 $e = \langle Up_1, Up_2 \rangle : UP \to S$ は split epi である。特に UP は Set における f, g の weak pullback であり、U は weak pullback を保つ。

証明。S に P_f 余代数構造を $\sigma(x, y) = \{(x', y') \in \mathrm{succ}\, x \times \mathrm{succ}\, y : fx' = gy'\}$ で入れる。$\sigma(x, y)$ は有限。(S, σ) は well-founded：S の path $(x_0, y_0) \to (x_1, y_1) \to \cdots$ は第一成分をとると X の path になるので有限。したがって (S, σ) は game。射影 $\pi_1 : S \to X$ が射であること：$\pi_1[\sigma(x, y)] \subset \mathrm{succ}\, x$ は明らか。逆に $x' \in \mathrm{succ}\, x$ をとると $fx' \in f[\mathrm{succ}\, x] = \mathrm{succ}(fx) = \mathrm{succ}(gy) = g[\mathrm{succ}\, y]$ なので、$y' \in \mathrm{succ}\, y$ で $gy' = fx'$ となるものがあり、$(x', y') \in \sigma(x, y)$。$\pi_2$ も同様。$f\pi_1 = g\pi_2$ は S の定義から成り立つので、(S, π_1, π_2) は Games における錐であり、pullback の普遍性から射 $u : S \to P$ で $p_i u = \pi_i$ となるものが一意にある。このとき $e \circ u = \langle p_1 u, p_2 u \rangle = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \mathrm{id}_S$。よって e は split epi。weak pullback の保存：(A, a_1, a_2) が Games における f, g の weak pullback なら、P は錐なので $v : P \to A$ で $a_i v = p_i$ となるものがあり、A の比較写像 $e_A : UA \to S$ は $e_A \circ Uv = e$ を満たすので全射。Set では、錐が weak pullback ⇔ 極限への比較写像が全射なので、UA は weak pullback。□

注。$\mathrm{Coalg}(P_f)$ の pullback を経由する必要はなかった。〔W〕Prop 5.4.1 の証明と同じ構成で、well-founded 性が S に遺伝することだけを加えた。

2. 項目 2：全射は effective epi、Games は regular、J_{coh} は subcanonical

定理 2.1。Games の全射 $q : X \to Y$ は、その kernel pair (P, p_1, p_2) の coequalizer である。

証明。$K = \{(x, x') : qx = qx'\}$ を集合の kernel pair、k_1, k_2 をその射影、$e : UP \to K$ を定理 1 の比較写像とする（全射）。Set では全射 Uq は k_1, k_2 の coequalizer である。e が全射なので、任意の写像 $h : UX \to W$ について $hk_1 = hk_2 \Leftrightarrow hk_1 e = hk_2 e \Leftrightarrow h \circ Up_1 = h \circ Up_2$。よって Uq は Up_1, Up_2 の coequalizer でもある。Games で $c : X \to C$ を p_1, p_2 の coequalizer とし（余完備）、$q = m \circ c$ と分解する。U は余極限を保つので Uc も Up_1, Up_2 の coequalizer であり、したがって Um は同型。U は同型を反映するので m は同型で、q は p_1, p_2 の coequalizer。□

定理 2.2。全射の pullback は全射である。したがって Games は regular category で、regular epi = epi = 全射。

証明。$q : X \to Y$ を全射、$f : Z \to Y$ を任意の射、(P, p_1, p_2) を q, f の pullback とする。$z \in Z$ に対し、$qx = fz$ となる $x \in X$ をとると (x, z) は集合の pullback の元なので、定理 1 により $p \in P$ で $p_2 p = z$ となるものがある。よって p_2 は全射。定理 2.1 から全射は regular epi、regular epi は epi、epi は全射（補題 0.2）なので三者は一致し、regular epi は pullback で安定。有限極限と kernel pair の coequalizer は (F4) からある。□

定義。$\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}$ 上の coherent 位相 J_{coh} を、有限個の射の族 $(a_i : A_i \to A)_{i \in I}$ で jointly surjective なもの（$\bigcup a_i(A_i) = A$）が生成する sieve から生成される Grothendieck 位相とする。

定理 2.3。(1) jointly surjective な有限族は pullback で安定し、J_{coh} は Grothendieck 位相である。(2) 任意の game X（有限でなくてよい）について、前層 $N(X) = \mathrm{Games}(-, X)|_{\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}}$ は J_{coh} 層である。特に J_{coh} は subcanonical。

証明。(1)(a_i) を jointly surjective、$f : B \to A$ を射とし、$B_i = B \times_A A_i$（補題 0.3 の系から有限）をとる。$b \in B$ に対し、$fb = a_i u$ となる i と u をとると (u, b) は集合の pullback の元なので、定理 1 により B_i の

元で B への射影が b になるものがある。よって $(B_i \to B)$ は jointly surjective。pullback で安定な covering family の生成する sieve は Grothendieck 位相を生成する（Johnstone, *Elephant*, C2.1)。(2)$(a_i : A_i \to A)$ を jointly surjective な有限族、$(g_i : A_i \to X)$ を matching family とする。すなわち、任意の有限 game B と $b : B \to A_i, b' : B \to A_j$ で $a_i b = a_j b'$ となるものについて $g_i b = g_j b'$。一意性：(a_i) は jointly epi なので明らか。存在：$a = [a_i] : \sqcup A_i \to A$ は全射。$x \in A$ に対し、$a_i u = x$ となる i, u を選んで $g(x) = g_i(u)$ と定める。well-defined であること：$a_i u = a_j u'$ とする。a の kernel pair を (K, k_1, k_2) とすると、定理 1 により $w \in K$ で $k_1 w = u, k_2 w = u'$ となるものがある。$B = \downarrow w$（有限）とすると、$k_1(B) = \downarrow u \subset A_i$、$k_2(B) = \downarrow u' \subset A_j$（余積の成分は部分ゲームなので下方閉)。$b = k_1|_B : B \to A_i, b' = k_2|_B : B \to A_j$ は $a_i b = a_j b'$ を満たすので、matching 条件から $g_i b = g_j b'$。w で評価して $g_i u = g_j u'$。射であること：$G = [g_i] : \sqcup A_i \to X$ は射で $G = g \circ a$（写像として)。$x = a(v)$ について $\mathrm{succ}(gx) = \mathrm{succ}(Gv) = G[\mathrm{succ}\, v] = g[a[\mathrm{succ}\, v]] = g[\mathrm{succ}(av)] = g[\mathrm{succ}\, x]$。以上で g は一意な射で $g a_i = g_i$。□

注。証明は A が有限でなくても通るので、$N(X)$ は大きい site $(\mathbf{Games}, J_{\mathrm{coh}})$ 上でも層である。

3. 項目 3：Games は extensive

定理 3。Games は infinitary extensive である。すなわち、任意の族 $(X_i)_{i \in I}$ について余積 $\sqcup X_i$ が存在し、任意の可換図式（下段が余積の入射 $X_i \to \sqcup X_i$、上段が $Z_i \to Z$、縦の射が $f_i : Z_i \to X_i$ と $f : Z \to \sqcup X_i$）について、すべての四角が pullback ⇔ 上段が余積。特に余積は disjoint かつ universal（Carboni – Lack – Walters, "Introduction to extensive and distributive categories", JPAA 84(1993), Prop 2.2 の特徴づけ)。

証明。余積は U が創るので、台集合は disjoint union、succ はそのまま。各 X_i は $\sqcup X_j$ の部分ゲーム（下方閉）である。⇒：各四角が pullback なら (F3) により $Z_i = f^{-1}(X_i)$（部分ゲーム)。$Z = \sqcup_i f^{-1}(X_i)$ は集合として disjoint union で、各 $f^{-1}(X_i)$ は下方閉（$z \in f^{-1}(X_i), z \to z'$ なら $fz' \in \mathrm{succ}(fz) \subset X_i$)。したがって canonical な射 $\sqcup_i Z_i \to Z$（U が創る余積から）は全単射な射であり、P_f 余代数の全単射準同型は同型なので、上段は余積。⇐：上段が余積なら $Z = \sqcup Z_i$ は集合として disjoint union で $f(Z_i) \subset X_i$。X_i たちは互いに素なので $f^{-1}(X_i) = Z_i$。部分ゲームの引き戻しは逆像 (F3) なので各四角は pullback。disjoint 性：入射は単射（mono）で、$X_i \times_{\sqcup X_j} X_k = X_i \cap X_k = \varnothing (i \neq k)$ は始対象。□

4. 項目 4：Games は exact でない

$\mathrm{Star}_2 = \{r, a, b\}$、$\mathrm{succ}\, r = \{a, b\}$、$\mathrm{succ}\, a = \mathrm{succ}\, b = \varnothing$。$\sigma : \mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_2$ を a, b の入れ替えとする（自己同型)。$\mathrm{Star}_1 = \{r', t\}$、$\mathrm{succ}\, r' = \{t\}$。$q : \mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_1$ を $r \mapsto r', a, b \mapsto t$ とする（射)。

補題 4.1（$\mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ の 11 元)。(F5) により $\mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ の元は次で尽くされる。

- 高さ 0：終端元 $\langle (x, y) \rangle = (\varnothing, (x, y))$、$x, y \in \{a, b\}$。4 個。
- 高さ 1：$(T, (r, r))$、T は 4 個の終端元の部分集合で、X-label 全体と Y-label 全体がともに $\{a, b\}$ になるもの。7 個（大きさ 2 が 2 個、3 が 4 個、4 が 1 個)。
- label が $(r, a), (a, r)$ 等の元はない（子の X-label 全体が $\{a, b\}$ かつ Y-label 全体が $\varnothing$ は両立しない)。

特に $D := (\{\langle (a, a) \rangle, \langle (b, b) \rangle\}, (r, r))$ と $C := (\{\langle (a, b) \rangle, \langle (b, a) \rangle\}, (r, r))$ は相異なる元である。

補題 4.2。$\Delta = \langle 1, 1 \rangle, \Gamma = \langle 1, \sigma \rangle : \mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ は、$\Delta(a) = \langle (a, a) \rangle, \Delta(b) = \langle (b, b) \rangle, \Delta(r) = D$、

$\Gamma(a) = \langle (a,b)\rangle, \Gamma(b) = \langle (b,a)\rangle, \Gamma(r) = C$ で与えられる。

$$\begin{aligned} R &:= \Delta(\mathrm{Star}_2) \cup \Gamma(\mathrm{Star}_2) \\ &= \{\langle (a,a)\rangle, \langle (b,b)\rangle, \langle (a,b)\rangle, \langle (b,a)\rangle, D, C\} \end{aligned}$$

（6 元）は部分ゲームで、$r_1 = p_1|_R, r_2 = p_2|_R$ とすると $\langle r_1, r_2\rangle : R \rightarrowtail \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ は内部同値関係である。

証明。Δ, Γ の記述：$H_{X\times Y}$ への射は label 写像で決まる (F2)。Δ の label 写像は $x \mapsto (x,x)$ で、右辺の写像は射であり同じ label 写像をもつので一致する。Γ も同様。R は二つの像（部分ゲーム）の和で、下方閉集合の和は下方閉なので部分ゲーム (F3)。反射律：Δ は R を経由する。対称律：$\tau = \langle p_2, p_1\rangle$ は label 写像 $(x,y) \mapsto (y,x)$ をもつ射で、label を hereditarily 入れ替える写像と一致する。$\tau(D) = D, \tau(C) = C, \tau\langle (x,y)\rangle = \langle (y,x)\rangle$ なので $\tau(R) \subset R$ であり、$\tau \circ \langle r_1, r_2\rangle$ は R を経由する (F3)。推移律：$Q = R \times_{Star_2} R$ を $r_2 : R \to \mathrm{Star}_2$ と $r_1 : R \to \mathrm{Star}_2$ の pullback、π_1, π_2 をその射影、$t = \langle r_1\pi_1, r_2\pi_2\rangle : Q \to \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ とする。$t(Q) \subset R$ を示せばよい (F3)。$w \in Q$ をとる。定理 1 の比較写像により $(\pi_1 w, \pi_2 w) \in R \times R$ かつ $r_2\pi_1 w = r_1\pi_2 w$。t は射なので、$t(w)$ は label $(r_1\pi_1 w, r_2\pi_2 w)$ をもち子の集合は $t[\mathrm{succ}\, w]$。補題 0.1 から $h(w) = h(\pi_1 w) \le 1$。$h(w) = 0$ なら $t(w)$ は label が $\{a,b\}^2$ の終端元で、R に属する。$h(w) = 1$ なら $\pi_1 w, \pi_2 w \in \{D, C\}$ で $t(w)$ の label は (r,r)。子 $w' \in \mathrm{succ}\, w$ は $(\pi_1 w', \pi_2 w') \in \mathrm{succ}(\pi_1 w) \times \mathrm{succ}(\pi_2 w)$ と、制約「$\pi_1 w'$ の label の第 2 成分 $= \pi_2 w'$ の label の第 1 成分」を満たし、$t(w')$ の label は ($\pi_1 w'$ の第 1 成分, $\pi_2 w'$ の第 2 成分)。場合分け：

- $(\pi_1 w, \pi_2 w) = (D,D)$：$\pi_1 w' = \pi_2 w' \in \{\langle (a,a)\rangle, \langle (b,b)\rangle\}$。$t(w') \in \{\langle (a,a)\rangle, \langle (b,b)\rangle\}$。
- (D,C)：$(\langle (a,a)\rangle, \langle (a,b)\rangle)$ または $(\langle (b,b)\rangle, \langle (b,a)\rangle)$。$t(w') \in \{\langle (a,b)\rangle, \langle (b,a)\rangle\}$。
- (C,D)：$(\langle (a,b)\rangle, \langle (b,b)\rangle)$ または $(\langle (b,a)\rangle, \langle (a,a)\rangle)$。$t(w') \in \{\langle (a,b)\rangle, \langle (b,a)\rangle\}$。
- (C,C)：$(\langle (a,b)\rangle, \langle (b,a)\rangle)$ または $(\langle (b,a)\rangle, \langle (a,b)\rangle)$。$t(w') \in \{\langle (a,a)\rangle, \langle (b,b)\rangle\}$。

$t(w)$ は積の元なので、その子の X-label 全体は $\mathrm{succ}\, r = \{a,b\}$。したがって子の集合はちょうど $\{\langle (a,a)\rangle, \langle (b,b)\rangle\}$ または $\{\langle (a,b)\rangle, \langle (b,a)\rangle\}$ であり、$t(w) \in \{D, C\} \subset R$。□

補題 4.3。$r_1, r_2 : R \rightrightarrows \mathrm{Star}_2$ の coequalizer は $q : \mathrm{Star}_2 \to \mathrm{Star}_1$ である。一方 q の kernel pair は $\mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ 全体（11 元）である。

証明。Set で r_1, r_2 の coequalizer は、$\{(r_1 u, r_2 u) : u \in R\} = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (r,r)\}$ の生成する同値関係による商 $\{[r], [a]\}$ で、U は余極限を創るので Games の coequalizer はこの商に $[r] \to [a]$ を入れた game、すなわち Star_1 と q。kernel pair は $qp_1, qp_2 : \mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2 \rightrightarrows \mathrm{Star}_1$ の equalizer。$\mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ から Star_1 への射は一意である（補題 0.1 により高さ 0 の元は t へ、高さ 1 の元は r' へ写るしかなく、これは射である）。よって $qp_1 = qp_2$ で、kernel pair は $\mathrm{Star}_2 \times \mathrm{Star}_2$ 全体。□

定理 4。Games は regular だが exact でない。したがって $\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}$ は pro-exact でない。

証明。regular は定理 2.2。R は内部同値関係（補題 4.2）で、その coequalizer q の kernel pair は R より真に大きい（補題 4.3。6 元と 11 元）。よって R は effective でなく、Games は exact でない。$\mathrm{Games} \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}})$〔L2848〕で $\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}$ は有限余極限をもつ小圏なので、Carboni – Pedicchio – Rosický Thm 19（Di Liberti – Ramos González Lemma 3.16：C が pro-exact $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ind}(C)$ が exact）の対偶から $\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}$ は pro-exact でない。□

注。`topos-status-2026-09-26.md` §4(b) の「$\Delta \cup \Gamma_\sigma$ は 5 元」は誤りで、正しくは 6 元（D と C は相異なる）。同メモは訂正した。

5. 帰結

- 〔W〕Cor 5.5.7 の証明が Games に必要とする性質のうち、regular（定理 2.2）、disjoint で universal な余積（定理 3）、生成系（lfp）は揃った。残るのは Map(Games) が小余積をもつことの Freyd – Scedrov 部分（検算項目 5）。
- J_{coh} が subcanonical（定理 2.3）なので、$N : \mathrm{Games} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$ は充満忠実で、予想 A（$\mathrm{Map}(\mathrm{Games}) \simeq \mathrm{Sh}(\mathrm{Games}_{\mathrm{fin}}, J_{\mathrm{coh}})$）の土台が整った。
- Games が topos でない理由は「有効性の欠如」に特定された：Giraud の公理のうち、この一つだけが落ちる（Giraud の形は Di Liberti – Ramos González Thm 3.2）。